සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved)

18079

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I (02) Applied Mathematics I	02	
	S	I

පැ තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B සහ C ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ සහ $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ වෙයි. $\alpha + \beta = 1$ ම නම් පමණක් A, B සහ C ඒකරේඛීය බව සාධනය කරන්න.

OPQ යනු ත්‍රිකෝණයකි; $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$. A යනු $\dfrac{PA}{QA} = \lambda\ (>1)$ වන පරිදි දික් කළ PQ පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයෙකි ; B, C යනු $\dfrac{OB}{BP} = \gamma\ (>0)$ ද $\dfrac{QC}{CO} = \mu\ (>0)$ ද වන පරිදි පිළිවෙලින් OP ත් OQ ත් පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය යි.

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ද $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ ද නම් $\mu\gamma\,(1 - \lambda)\,\mathbf{a} - \mu\,(1 + \gamma)\,\mathbf{b} + (1 + \mu)\,\mathbf{c} = (1 - \lambda\mu\gamma)\,\mathbf{q}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\lambda\mu\gamma = 1$ ම නම් පමණක් A, B, C ඒකරේඛීය බව අපෝහනය කරන්න.

2. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ්‍ - ශූන්‍ය දෛශික දෙකක් $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(ඇ) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී $\mathbf{a}$ ත් $\mathbf{b}$ ත් අතර කෝණය සොයන්න :

(i) $\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ සහ $|\mathbf{b}| = 2\,|\mathbf{a}|$

(ii) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

(ආ) A, B, C, D යනු චතුස්තලයක ශීර්ෂ වෙයි. AD ට BC ලම්බ නම් ද BD ට CA ලම්බ නම් ද CD ට AB ලම්බ බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න

3. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ් - ශූන්‍ය දෛශික දෙකක් $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$Oxyz$ යනු සුරත් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය ඛණ්ඩාංක පද්ධතියකි. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු පිළිවෙලින් Ox, Oy, Oz අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වන ඒකක දෛශික යි.

(i) $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ හා $\mathbf{k}$ දෛශිකවල එම අනුපිළිවෙල අනුව දෛශික ගුණිතය, සොයන්න.

(ii) $\overrightarrow{AC} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ත් $\overrightarrow{BD} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ත් විකර්ණ ලෙස ඇති $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\sqrt{42}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් P නම් ලක්ෂ්‍යයෙක පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ වෙයි නම්, Q ලක්ෂ්‍යයේ $\mathbf{q}$ පිහිටුම් දෛශිකය, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ හා $\mathbf{k}$ ඇසුරින් සොයන්න. මෙහි,

$\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{k} \times \mathbf{p}$ වෙයි.

තව ද, $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{k}$ නම්, $z = 0$ තලය මත වන $x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටන බව පෙන්වන්න.

4. බර W වූ AB දණ්ඩක්, අරය r ද, කේන්ද්‍රය C ද වූ සුමට අචල අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් තුළ සම්පූර්ණයෙන් ම පිහිටන පරිදි, නිශ්චල ව පිහිටා ඇත. AB දණ්ඩේ G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මඟින් දණ්ඩ a හා b කොටස් දෙකට බෙදී තිබෙයි. මෙහි $b > a$ ද $r > \sqrt{ab}$ ද වෙයි. සමතුලිතා පිහිටීමේ දී තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය θ නම්,

$$\sin\theta = \frac{b-a}{2\sqrt{r^2 - ab}} \text{ බවත් } CG = \sqrt{r^2 - ab} \text{ බවත් පෙන්වන්න.}$$

පාත්‍රයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

5. A නම් ලක්ෂ්‍යයක් වටා, විශාලත්වයෙන්, දිශාවෙන් හා ක්‍රියා රේඛාවෙන් $\overrightarrow{BC}$ මඟින් නිරූපණය කැරෙන බලයෙක ඝූර්ණයේ විශාලත්වය, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව සාධනය කරන්න.

$ABCD$ යනු ත්‍රපීසියමකි ; එහි AD හා BC සමාන්තර ද, E, F යනු පිළිවෙලින් AD හා BC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ද වෙයි.

විශාලත්වයෙන්, දිශාවෙන් හා ක්‍රියා රේඛාවෙන් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{DB}$ මඟින් නිරූපණය කැරෙන බල හයකින් පද්ධතියක් සමන්විත වෙයි. P යනු දික් කළ DA මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් නම්, P වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණයේ විශාලත්වය

$$\frac{4\,|\,AP - BF\,|\,S}{AD + BC}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි S යනු $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය යි.

පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයත් එහි ක්‍රියා රේඛාවට AD හමු වන පිහිටීමත් සොයන්න.

6. එක එකක බර W වන AB හා BC සමාන ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර තිබෙයි. ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ඇදනු ලැබූ අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවේ දිග කොතෙක් ද යත් එය තොවක් ව ඇති විට ABC කෝණය සෘජුකෝණයක් වන පරිදි ය. පද්ධතිය නිදහස් ලෙස A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇති නම් ද එය සමතුලිතතා පිහිටීමේ තිබෙයි නම් ද සිරසට AB ගේ ආනතිය $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ බවත් තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3W}{\sqrt{5}}$ බවත් පෙන්වන්න.

BC දණ්ඩ මත B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව BC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බව ද පෙන්වන්න.

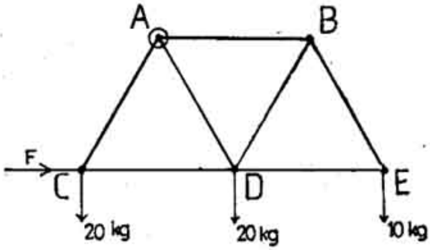
7. අරය a ද, O කේන්ද්‍රයේ දී රේඩියන් 2θ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ ද, ACB ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මධ්‍ය අරය මත පිහිටන බවත් $OG = a\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ බවත් පෙන්වන්න.

එක ම ඒකාකාර කම්බියෙන් ලබා ගත් එහෙත් වෙනස් අර සහිත වෘත්තාකාර කැබැලි දෙකක් අතුරෙන් එකකින් S_1 අර්ධ වෘත්තයක් ද, අනෙකින් කේන්ද්‍රයේ දී රේඩියන් 2θ $(<\pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කැරෙන S_2 වෘත්ත චාපයක් ද එකට තබා ඇත්තේ ළසඳක් (crescent) සෑදෙන පරිදි ය. θ කෝණය කෙසේ ද යත් ළසඳෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය S_2 ඇතුළු චාපය මත පිහිටන පරිදි වෙයි නම්,

$$\sin^2\theta - \left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right)\sin\theta + \tfrac{\pi}{4}\sin 2\theta = \theta$$

බව සාධනය කරන්න.

8.



$A, B, C, D, E,$ ලක්ෂ්‍යවල දී සුවල ලෙස සන්ධි කළ සමාන ලුහු දඬු හතකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් ඉහත රූපයෙන් නිරූපණය වෙයි. $C, D,$ හා E ලක්ෂ්‍යවල දී පිළිවෙළින් 20 kg, 20 kg හා 10 kg භාර තුන රාමු සැකිල්ල දරා සිටියි. රාමු සැකිල්ල, A අවල ලක්ෂ්‍යයට, නිදහස් ලෙස අසවු කර තිබෙයි. C ලක්ෂ්‍යයට යෙදූ F තිරස් බලයක් මගින් CDE තිරස් ව තබා ඇත. F සොයන්න. A හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකයත් සිරස් සංරචකයත් සොයන්න.

ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ඒ නයින් දඬුවල ඇත්තේ ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරමින් දඬු සියල්ලේ ම ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

9. බර W ද, දිග $2a$ ද, වන ඒකාකාර ඉණිමගක්, එහි එක් කෙළවරක් සුමට සිරස් බිත්තියකටත් අනෙක් කෙළවර, ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වූ රළු පොළොවකටත් හේත්තු වන සේ තබා තිබෙයි. ඉණිමගේ බර මෙන් සිව් ගුණයක් බර මිනිසකුට, එය ලිස්සා යන්නේ නැති ව ඉණිමගේ මුළු දිග ම නැගීමට පුළුවන. සුමට කෙළවරේ දී යටියත් සිරස සමඟ ඉණිමගේ ආනතිය θ නම්, පද්ධතියේ සාධාරණ සමතුලිතතා පිහිටීමක් සැලකීමෙන්,

$$\mu \geqslant \tfrac{9}{10}\tan\theta$$

බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉණිමගේ අඩිය බිත්තියේ සිට $a\sqrt{2}$ දුරකින් වෙයි නම් ද, $\mu \leqslant \frac{1}{2}$ නම් ද, ඉණිමග ලිස්සන්නේ නැති ව මිනිසාට නැවතත් ඉණිමගේ මුළු දුර ම නැගීමට හැකි වන පරිදි දණ්ඩ හරහා යන සිරස් තලයේ යෙදිය යුතු යුග්මයේ අවම අගය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) ABC ත්‍රිකෝණික ආස්තරය, සමජාතීය ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත්තේ එහි තලය සිරස් ව ද, BC පාදය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ ද පිහිටන පරිදි ය. h යනු Aහි ගැඹුර විට පීඩන කේන්ද්‍රයේ ගැඹුර $\frac{h}{2}$ බව අනුකලනයෙන් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ පෙන්වන්න.

(ආ) ABC ත්‍රිකෝණික ආස්තරයක්, ඒකාකාර ඝනත්වයෙන් යුත් ද්‍රවයෙක සිරස් ලෙස ගිල්වා ඇත්තේ, එහි A ශීර්ෂය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ ද B ශීර්ෂය, නිදහස් පෘෂ්ඨයට පහළින් a ගැඹුරකින් ද C ශීර්ෂය, නිදහස් පෘෂ්ඨයට පහළින් b ($\geqslant a$) ගැඹුරකින් ද පවතින පරිදි ය. එහි පීඩන කේන්ද්‍රය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ සිට,

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{2(a + b)}$$

ගැඹුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

11. සිරස් කෝණය 2α වන ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක් සම්පූර්ණයෙන්ම ජලයේ ගිල්වා ඇත්තේ එක් ජනකයක් ජලය, පෘෂ්ඨයේ තිබෙන ලෙස ය. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම,

$$W \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි W යනු කේතුවෙන් විස්ථාපනය වුණු ජලයේ බර යි.

එම සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම, කේතුවේ අක්ෂයට $\cot^{-1}(2 \tan \alpha)$ කෝණයෙකින් ආනත බව ද සාධනය කරන්න.

12. අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද ස්කන්ධය M ද වන ඒකාකාර නොවන ගෝලයක්, එහි පෘෂ්ඨය මත ඇති P ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳූ ලුහු තන්තුවක් මගින් එල්ලා තිබෙයි. විශාල වැංකියක වූ ρ ඒකාකාර ඝනත්වයෙන් යුත් නිශ්චලතාවේ පවතින ද්‍රවයක, ගෝලය අඩක් ගිල්වා ඇත. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය T (> 0) වෙයි. O කේන්ද්‍රයේ සිට c දුරකින් ගෝලයේ G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පිහිටා ඇත. GP මගින් O හි දී θ කෝණයක් ආපාතනය කැරෙයි. නිදහස් ද්‍රව පෘෂ්ඨයේ සිට h ගැඹුරකින් O කේන්ද්‍රය පිහිටයි නම් ද OG, උඩු සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම් ද ද්‍රවය හේතු කොට ගෙන ගෝලය මත ඇති කැරෙන උඩු-තෙරපුමේ විශාලත්වයත් ක්‍රියා රේඛාවත් සොයන්න.

ඒ නයින්, සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී,

(i) $U = \frac{\pi \rho g}{3} (a + h)^2 (2a - h)$ විට $T = Mg - U$ බවත්,

(ii) $\alpha = \tan^{-1} \left[\dfrac{T \sin \theta}{T \cos \theta - \dfrac{Mgc}{a}} \right]$ බවත්

පෙන්වන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

18079

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II (02) Applied Mathematics II	02	
	S	II

පැ තුනයි/Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $e^y \left(\dfrac{dy}{dx} + 1 \right) = 1$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

   (ii) v යනු x හි ශ්‍රිතයක් විට $y = vx$ යන්න

   $$2x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = x(x + 2y)$$

   අවකල සමීකරණය සපුරාලයි නම් $v(x - c) = x + c$ බව පෙන්වන්න. මෙහි c යනු අභිමත නියතයකි.

   (iii) xOy තලයේ වක්‍රයක් කෙසේ ද යත් $P(x, y)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයේ අභිලම්භය Mහි දී x- අක්ෂයත් Nහි දී y - අක්ෂයත් ඡේදනය වන අතර $MP = PN$ වන පරිදි වෙයි. තව ද වක්‍රය $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව දී තිබෙයි. වක්‍රයේ සමීකරණය සොයන්න.

2. f නියත ත්වරණයෙකින් ඍජු රේල් පාරක ගමන් කරන l දිගැති දුම්රියකට $2V$ උපරිම වේගයක් ඇත. රේල් පාරට සමාන්තර පාරක, දුම්රිය යන දිශාවට ම ගමන් කරන මෝටර් රථයකට $2f$ නියත ත්වරණයකුත් $3V$ උපරිම වේගයකුත් තිබේ. ආරම්භයේ දී දුම්රියේ පසු පස කෙළවරත් මෝටර් රථයේ ඉදිරි පසත් එක එල්ලේ වන අතර දුම්රියේත් මෝටර් රථයේත් වේග පිළිවෙළින් V හා $\frac{1}{2}V$ වෙයි. දුම්රියත් මෝටර් රථයත් ඒවායේ උපරිම වේග ලබා ගන්නේ පිළිවෙලින් t_1 හා t_2 කාලවල දී ය. දුම්රියේ ඉදිරි පස හා මෝටර් රියේ ඉදිරි පස එක එල්ලේ පිහිටන්නේ $t_3 (> t_2)$ කාලයේ දී ය. දුම්රියේ චලිතයත් මෝටර් රථයේ චලිතයත් සඳහා ප්‍රවේග කාල වක්‍ර එක ම රූප සටහනක අඳින්න. ඒ නයින්, දුම්රියේ පසු පස කෙළවර, යළිත් වරක් t_1 කාලයේ දී මෝටර් රථයේ ඉදිරි පස සමග එක එල්ලේ පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

$$t_3 = \frac{l}{V} + \frac{17V}{16f} \quad \text{බවත්}$$

$$3V^2 < 16fl \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

3. සමතල රේල් පාරක ගමන් කරන, ජවය කපා හැර ඇති දුම්රියක මන්දනය $k(v^2 + U^2)$ වෙයි. මෙහි v යනු වේගය ද k හා U යනු නියත ද වෙයි. ආරම්භයේ දී $v = 2U$ නම්, $\dfrac{1}{Uk}\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ කාලයේ දී $\dfrac{1}{2k}\log_e \frac{5}{2}$ දුරක දී එහි වේගය අඩක් වන බව සාධනය කරන්න.

දවනර $\dfrac{\pi}{4Uk}$ කාලයෙක දී තවත් $\dfrac{1}{2k}\log_e 2$ දුරක් ගමන් කළ පසු දුම්රිය නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව ද සාධනය කරන්න.

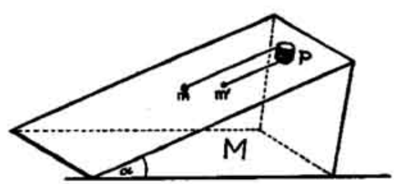
අනෙක් පිට බලන්න.

4. තොරව u උපරිම වේගයක් සහිත Q නම් හොර බඩු බෝට්ටුවක් A පිහිටීමේ තිබෙයි. A ට දකුණු දෙසින් නැව් සැතැප්ම a දුරකින් වූ P මුර සංචාරක බෝට්ටුවක් තොරව $v\ (>u)$ නියත ප්‍රවේගයෙකින් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරන බව ආරංචි විය. P හි ගමන් මග වෙනස් නොකළහොත්, P ගේ ගමන් මගට හැකි තාක් ඈතින් සිටීම සඳහා Q යාත්‍රා කළ යුතු දිශාව සොයන්න. මේ අවස්ථාවේ දී ඒවා අතර කෙටි ම දුර කොපමණ ද ?

තවත් අවස්ථාවක දී, v ප්‍රවේගයෙන් උතුරට ගමන් කරන P මුර සංචාරක බෝට්ටුව විසින්, නැව් සැතැප්ම b බටහිරින් පිහිටි Q හොර බඩු බෝට්ටුව, තොරව $\sqrt{v^2 - u^2}$ ප්‍රවේගයෙකින් නැගෙනහිරින් දකුණට $\cos^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරනු දක්නා ලදී. ඇත්ත වශයෙන් ම Q බෝට්ටුව එහි u උපරිම වේගයෙන් ගමන් කරන බව පෙන්වන්න. එහි චලිතයේ දිශාව සොයන්න.

දන් Q බෝට්ටුව තම ගමන් මාර්ගය වෙනස් නො කළහොත්, එය අල්ලා ගැනීම සඳහා, බටහිරින් උතුරට $\sin^{-1}\left(\frac{u^2}{v^2}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවට P බෝට්ටුව ගමන් කළ යුතු බවත් පැය $\dfrac{bv}{\sqrt{v^2 - u^2}\,[\,u + \sqrt{u^2 + v^2}\,]}$ කාලයකට පසු අල්ලා ගැනීම සිදු වන බවත් පෙන්වන්න.

5. α ආනතියෙන් යුත් සුමට කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා තිබෙයි. දෙ කෙළවරට m හා m' $(m > m')$ ස්කන්ධ ඇඳු $2l$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, කුඤ්ඤයේ ඉහළ ආනත මුහුණතින් තෙරා තිබෙන කුඩා සුමට P නාදත්තක් වටා යවා ඇත. අංශු, කුඤ්ඤයේ මුහුණත සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් පවතියි. ආරම්භයේ දී , අංශු එකක් අනෙකට ආසන්නව ද නාදත්තේ සිට l දුරකින් පිහිටන පරිදි ද තබා තිබෙයි. තන්තුවේ එක් එක් කොටස තොබුරුල් ව ද ආනත මුහුණතේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක ද පිහිටා ඇත. බරින් අඩු m' අංශුව P නාදත්ත වෙතට ඒමට පෙර කුඤ්ඤයේ ත්වරණය,



$$\frac{(m - m')^2\, g \sin\alpha \cos\alpha}{M\,(m + m') + 4\,mm' + (m - m')^2 \sin^2\alpha}$$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි M යනු කුඤ්ඤයේ ස්කන්ධය යි. (P නාදත්තේ සිට කුඤ්ඤයේ පහළ දරය තෙක් දුර $2l$ ට වැඩි බව උපකල්පන කළ යුතු ය.)

බරින් අඩු අංශුව නාදත්ත වෙත පැමිණෙන විට කුඤ්ඤය $\dfrac{l\,(m - m')\cos\alpha}{M + m + m'}$ දුරක් මේසය මත ගමන් කර ඇති බව අපෝහනය කරන්න.

6. එන්ජිමක්, 40 000 N ක නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහි ව සමතල රේල් පාරක $10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ සතත වේගයකින් ගමන් කරයි. එන්ජිමේ ජව ප්‍රතිදානය, kW වලින් ගණනය කරන්න.

ඊ ළඟට එන්ජිම, සබැඳුම් දණ්ඩක් මඟින් දුම්රිය මැදිරියකට ඈඳන ලදී. මැදිරියේ චලිතයට නියත ප්‍රතිරෝධය 20 000 N කි. දන් එන්ජිමේ ජව ප්‍රතිදානය 900 kW නම්, සමතල රේල් පාරක දුම්රියේ උපරිම වේගය $\mathrm{m\,s^{-1}}$ වලින් ගණනය කරන්න.

මේ අවස්ථාවේ දී, සබැඳුම් දණ්ඩේ ආතතිය නිව්ටන්වලින් කොපමණ ද?

පසු ව, දුම්රිය ඉහත ජව ප්‍රතිදානය ම, එනම් 900 kW ඇති ව එම නියත සර්ෂණ බලවලට එරෙහි ව තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{50}\right)$ ආනතියක් සහිත බෑවුමක් ඉහළට යයි. දුම්රියේ මුළු ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 340 ක් නම්,

(i) $5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ වේගයෙන් බෑවුම ඉහළට යන විට දුම්රියේ ත්වරණය $\frac{13}{85}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ බවත්,

(ii) බෑවුම ඉහළට දුම්රියේ උපරිම වේගය $7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ට යම්තම් වැඩි බවත්

පෙන්වන්න.

(ගුරුත්වජ ත්වරණය, g යන්න $10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ලෙස ද, මෙට්‍රික් ටොනය, 1000 kgට සමාන ලෙස ද ගන්න.)

7. A අභ්‍යාසනය, තිරස සමඟ α $(\neq \frac{\pi}{2})$ කෝණයක් සාදන සරල රේඛාවක් ඔස්සේ U ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ඉහළ නඟියි. අභ්‍යාසනය, පොළොවේ වූ අභ්‍යාසනා භාගක තුවක්කුවකට සිරස් ලෙස ඉහළින් h උසකින් පියාසර කරන මොහොතක දී V ප්‍රවේගයෙන් තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන දිශාවකට තුවක්කුවෙන් S වෙඩිල්ලක් තබනු ලැබෙයි. වෙඩිල්ල අභ්‍යාසනයේ වැදුනොත්, A ට සාපේක්ෂ ව S හි පෙත සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $V^2 > U^2 [1 + k^2 + 2k\sin\alpha]$ බවත්

(ii) $\tan\theta > k\sec\alpha + \tan\alpha$ බවත් පෙන්වන්න. මෙහි $k = \dfrac{\sqrt{2gh}}{U}$

$k > 1$ නම්, $\theta > \cos^{-1}\left(\dfrac{U}{\sqrt{2gh}}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

8. A, B හා C යන අංශු තුනේ ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m, $2m$ හා $2m$ වෙයි. AB හා AC ලුහු අවිතන්‍ය තන්තු මඟින් A අංශුව B ටත් C ටත් ඈඳා තිබෙයි. තන්තු නො බුරුල්ව ද BAC කෝණය $= 60°$ ද වන සේ පද්ධතිය සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට A අංශුවට I ආවේගයක් යොදනු ලැබෙයි. අංශුවල ආරම්භක ප්‍රවේග සොයන්න. $\overrightarrow{BA}$ සමඟ $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවකට A අංශුව චලනය වීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියට යොදන ලද චාලක ශක්තිය, m හා I ඇසුරෙන් සොයන්න.

9. එක හා සමාන සුමට කේවල ප්‍රත්‍යාස්ථ ගෝල දෙකක්, ඇල ව ඝට්ටනය වෙයි ; ආරම්භයේ දී එක් ගෝලයක් නිශ්චලතාවේ පවතියි. ඝට්ටනයෙන් පසු ඒවායේ පෙත් **සෘජුකෝණි** වන බව පෙන්වන්න.

එක එකක් 3 cm අරයෙන් යුත් එ වැනි S_1, S_2 ගෝල දෙකක කේන්ද්‍ර පිළිවෙලින් A, B ලක්ෂ්‍යවල වෙයි. මෙහි $AB = 16$ cm. ඒ හා සමාන තෙ වැනි S_3 ගෝලයක් AB ට සෘජුකෝණි ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරන ලද්දේ පළමුවෙන් ම S_1 සමඟ ද ඊ ළඟට S_2 සමඟ ද ගැටෙන පරිදි ය. පළමු වැනි හා දෙ වැනි ඝට්ටනවල දී S_3 හි කේන්ද්‍රය පිළිවෙලින් C හා C' ලක්ෂ්‍යවල පිහිට යි. S_3 ගේ චලිතයේ අවසාන දිශාව ද AB ට සෘජුකෝණි ලෙස වෙයි. CC' දුර සොයන්න. S_1, S_2, S_3 ගෝලවල අවසාන වේග 20 : 12 : 9 අනුපාතයෙන් වන බව පෙන්වන්න.

10. (අ) P ලක්ෂ්‍යයක්, xOy තලයේ චලනය වන්නේ කෙසේ ද යත් t කාලයෙක දී එහි පිහිටුම් දෛශිකය $\overrightarrow{OP} = (a\cos\omega t)\,\mathbf{i} + (a\sin\omega t)\,\mathbf{j}$ වන පරිදි ය. මෙහි a, ω යනු නියත ද $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් Ox, Oy අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික ද වෙයි. P ගේ පෙත වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න. P ගේ ප්‍රවේගයේත් ත්වරණයේත් විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

තව ද, N යනු P සිට Ox අක්ෂයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය නම්, N සරල අනුවර්තී චලිතයෙක යෙදෙන බවත් එහි ආරම්භක පිහිටීමේ $(t = 0)$ සිට $P\hat{O}N =$ රේඩියන් α වන පරිදි වූ පිහිටීම තෙක් ගත වන කාලය $\dfrac{\alpha}{\omega}$ බවත් පෙන්වන්න.

(ආ) පෘථිවි පෘෂ්ඨය තුළ වූ වස්තුවක්, එහි සිට පෘථිවි කේන්ද්‍රයට ඇති දුරට අනුලෝම වශයෙන් සමානුපාතික බලයකින්, පෘථිවියේ කේන්ද්‍රය දෙසට ආකර්ෂණය වන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, වස්තුවක් පෘථිවි පෘෂ්ඨයේ සිට 32 km ගැඹුරු සිරස් වළක පතුළට වැටීමට ගත වන කාලය සඳහා සංඛ්‍යාත්මක ප්‍රකාශනයක් සොයන්න. (පෘථිවියේ අරය $= 6400$ km ලෙස ද ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ලෙස ද ගන්න.)

[අනෙක් පිට බලන්න.

11. සුමට පටු කුහර බටයක්, කේන්ද්‍රය O ද, අරය a ද වූ වෘත්තයෙක හැඩයට නමා එහි තලය සිරස් ව තිබෙන සේ සවි කර ඇත. පිළිවෙලින් ස්කන්ධය m හා km වන P හා Q අංශු දෙක, $\frac{\pi a}{2}$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් ඈඳා බටය තුළ තබා ඇත්තේ O ට සිරස් ලෙස ඉහළින් P ද O හා එක ම මට්ටමක Q ද පිහිටන පරිදි ය. තන්තුව බටය තුළ වෙයි. $t = 0$ කාලයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. t කාලයෙක දී OP, උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්, යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය උපයෝගී කර ගෙන, තන්තුව නො බුරුල් ව පැවතුනහොත්,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{a(1+k)}(\sin\theta + k\cos\theta)$$

බව පෙන්වන්න. $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{4}$ විට පමණක් ඉහත සමීකරණය වලංගු වන බව අපෝහනය කරන්න.

P අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $k > 3 - 2\sqrt{2}$ නම් තන්තුව බුරුල් වීමට පෙර ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m ද පැත්තක් $2a$ ද වන $ABCD$ ඒකාකාර සමචතුරස්‍ර තහඩුවක, AB දරය වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය අනුකලනය කිරීමෙන් සොයන්න.

තහඩුවේ කේන්ද්‍රය හරහා එහි තලයට ලම්බ අක්ෂයක් වටා තහඩුවේ අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{2}{3}ma^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

තහඩුව, සිරස් ලෙස අචල ව ඇති ඉහත සඳහන් අක්ෂය වටා Ω කෝණික වේගයෙකින් නිදහසේ භ්‍රමණය වෙයි. $\frac{2}{3}m$ ස්කන්ධයෙන් යුත් ස්ථාවර අංශුවක් තහඩුවේ A මුල්ල හා ගැටී තහඩුවේ ඇලෙයි. ඉන්පසු තහඩුවේ ඇති වන කෝණික වේගය සොයන්න. ගැටුම නිසා සිදු වන චාලක ශක්තියේ හානිය $\frac{2}{9}ma^2\Omega^2$ බව පෙන්වන්න.

ast Papers Wiki - Most Extensive Wikipedia of Past Paper

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

18277

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(01) ශුද්ධ ගණිතය I (01) Pure Mathematics I	**01** **S I**

පැ. තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\frac{4}{2.3.4} + \frac{7}{3.4.5} + \dots + \frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \dots$

ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඉහත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, අනන්තය තෙක් ඓක්‍යය සොයන්න.

(ii) ඕනෑ ම n ධන නිඛිලයක්, $5m$, $5m \pm 1$, $5m \pm 2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි m යනු නිඛිලයකි. එ නයින්, n^2 ආකාරයේ ඕනෑ ම නිඛිලයක් 5 න් බෙදූ විට ශේෂය 0, 1, 4 අතුරින් එකක් වන බව අපෝහනය කරන්න.

2. (අ) $x, y \neq 0$ වන පරිදි වූ x, y, λ, μ තාත්ත්වික රාශි,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \quad x + y = \lambda, \quad \frac{y}{x} = \mu$$

සම්බන්ධතා මඟින් සැබඳේ.

λ සහ μ අතර සම්බන්ධතාවක් ලබා ගෙන, μ තාත්ත්වික වන පරිදි වූ λ හි අගය කුලකය සොයන්න.

එ නයින්, $\lambda = 3$ විට, $\frac{y}{x}$ නිර්ණය කරන්න.

(ආ) $x, a, b > 0$, $a > b$ සහ $x^2 > ab$ විට,

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} > 0$$

බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $\left|2x - 1\right| < 3x + 5$

වන පරිදි වූ x හි අගයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i) $t = x + \frac{1}{x}$ යයි ලියමින් $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සියල්ල ම සොයන්න.

(ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$ යයි ගනිමු. $y^2 + y + a$ ආකාරයෙන් E ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි a නියතයක් ද y යන්න b හා c නියතයන් වන $x^2 + bx + c$ ආකාරයෙන් ද වේ. එ නයින් සියලු ම තාත්ත්වික x සඳහා $E \geqslant 3$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{k}{x-2} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ වන සේ k නියතයක් සහ x හි ශ්‍රිතයක් වන f සොයන්න. $(x-1)$ හි බහුපදයක් ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. එ නයින් $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ හි භින්න භාග සොයන්න.

4. නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
$z \neq 1$ විට,

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} \equiv \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 0$ විට, ඉහත සර්වසාම්‍යයේ දකුණු පැත්ත

$$\frac{z^{-1} - (n+1)z^{n-1} + nz^n}{z^{-1} + z - 2}$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එ නයින්, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස ගැනීමෙන් හා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, θ හි අගය 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නොවන විට,

$$1 + \sum_{r=2}^{n} r\cos(r-1)\theta = \frac{(n+1)\cos(n-1)\theta - n\cos n\theta - \cos\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

බව පෙන්වන්න.

5. ආර්ගන් රූ සටහනෙහි, z සහ z' සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P සහ P' මගින් ද $z - z'$ සංඛ්‍යාව Q මගින් ද නිරූපණය වන්නේ නම්, OQ යන්න $P'P$ ට සමාන හා සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

B සහ C හි කෝණ එක එකක් $\frac{\pi - \alpha}{2}$ වන සේ වූ ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක A, B, C ශීර්ෂ මගින් පිළිවෙලින් z_1, z_2, z_3 සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ.

$$(z_3 - z_2)^2 = 4(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

බව සාධනය කරන්න.

6. එකිනෙකට වෙනස් පොත් දහයක් (කොළ පාට හතරක්, නිල් පාට හතරක් සහ රතු පාට දෙකක්) රාක්කයක් මත පිළියෙල කර ඇත. එක එක් අවස්ථාවේ දී සියලු ම ආගණන කාර්යය පැහැදිලි ලෙස දක්වමින්

(i) පාට සහ අනුපිළිවෙල නොසලකා හරි නම්
(ii) එක ම පාටින් යුත් පොත් සෑම විට ම එක ළඟ තබා ඇත්නම්
(iii) එක ම පාටින් යුත් පොත් සෑම විට ම එක ළඟ එක ම අනුපිළිවෙලට තබා ඇත් නම්
(iv) කොළ පාට පොත් සෑම විට ම එක ළඟ එක ම අනුපිළිවෙලට සිටින සේ ද රතු පාට පොත් සෑම විට ම වෙන් වෙන් ව සිටින සේ ද තබා ඇත් නම්

රාක්කය මත පොත් පිළියෙල කළ හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

7. n ධන නිඛිලයක් විට, සුපුරුදු අංකනයකින්,

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \dots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \dots + x^n$$

බව සාධනය කරන්න.

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$$ හි ප්‍රසාරණයේ x හි සංගුණකය සොයන්න.

$(1 - x^2)^n = (1 - x)^n\,(1 + x)^n$ හි දෙපැත්ත ම ප්‍රසාරණය කර,

$C_o\, C_r - C_1\, C_{r-1} + C_2\, C_{r-2} + \dots + (-1)^r\, C_r\, C_o = 0$, r ඔත්තේ විට

$= (-1)^{\frac{r}{2}}\, C_{\frac{r}{2}}$, r ඉරට්ටේ විට

බව පෙන්වන්න ; මෙහි $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2\, x^2 + C_3\, x^3 + \dots + C_n\, x^n$

8. (i) f යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් ද $f(x) > 0$ ද නම්, x විෂයයෙන් $\sqrt{f(x)}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමුලධර්ම වලින් ලබා ගන්න.

(ii) x විෂයයෙන් $\tan^{-1} x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.
$x = \tan\theta$ යයි ගැනීමෙන් හෝ x විෂයයෙන් $\tan^{-1} x$ හි ව්‍යුත්පන්නය උපයෝගී කර ගනිමින් x විෂයයෙන්

$\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$ සහ $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නයන් සොයන්න.

$\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)$ විෂයයෙන් $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

(iii) $y = \{\sin^{-1} x\}^2$ නම් $(1 - x^2)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

$(1 - x^2)\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\,\dfrac{dy}{dx} = 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

9. (අ) $a > 0$ නම්, $\dfrac{d}{dx}(a^x)$ ලබා ගෙන,

c නියතයක් විට, $\displaystyle\int_0^c \frac{a^x}{a^x + 1}\,dx$ අගයන්න.

$0 \leqslant c \leqslant \frac{\pi}{2}$ විට,

$$I = \int_{-c}^{c} \frac{\cos x\, dx}{1 + a^x} \quad \text{සහ}$$

$$J = \int_{-c}^{c} \frac{a^x \cos x\, dx}{1 + a^x} \quad \text{නම්,}$$

(i) $t = -x$ ආදේශය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $I = J$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $I + J$ ලබා ගන්න.

ඒ නයින් $c = \frac{\pi}{6}$ විට J හි අගය ලියන්න.

(ආ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2 + x)^{\frac{1}{2}}\,(2 - x)^{\frac{3}{2}}}$ අගයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (i) $-1 < x < 1$ විට, $\ln(1+x)$ සඳහා මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right)$$

බව පෙන්වා, $y > 0$ විට,

$$\ln y = 2\left\{\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \dots\right\}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

$\ln 2$ සඳහා ශ්‍රේණියේ මුල් පද 3 ලියා, එහි අගය සාර්ථක 3 කට අගයන්න.

(ii) සිම්සන් නීතිය සඳහන් කරන්න.

$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලබා ගැනීම පිණිස, කෝටික පහක් ගෙන එම නියමය යොදන්න.

11. C වක්‍රයක්,

$$x = \frac{at^3}{t-1},\ y = \frac{a(t^2-3)}{t-1},\ t \geqslant 0\ (t \neq 1)$$ පරාමිතික සමීකරණවලින් ගෙන දේ.

(i) $\frac{3}{2}$ හරහා t වැඩි වන විට, $\frac{dx}{dt}$ හි ලකුණ වෙනස් වන බව ද,

(ii) සියලු ම t සඳහා, $\frac{dy}{dt}$ එක ම ලකුණ ගන්නා බව ද

පෙන්වන්න.

$t \geqslant 0\ (t \neq 1)$ සඳහා, එක ම රූප සටහනෙහි, t ට ඉදිරි ව x ද t ට ඉදිරි ව y ද වක්‍රවල කටු සටහන් අඳින්න. එ නයින්, C වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ නම්,

$y = f(x)$ සහ $y = \frac{1}{f(x)}$ වක්‍රවල කටු සටහන් එක ම රූප සටහනෙහි අඳින්න. ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ඇතොත් ඒවායේ ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න.

(i) ඉහත වක්‍ර දෙකින් අන්තර්ගත වන R පරිමිත පෙදෙසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

(ii) R පෙදෙස y අක්ෂය වටා π රේඩියන් හරහා භ්‍රමණය වීමෙන් ලැබෙන පරිභ්‍රමණ ඝනයේ පරිමාව නිර්ණය කරන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

18277

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(01) ශුද්ධ ගණිතය II
(01) Pure Mathematics II

01	
S	II

පැ තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) *OAB, OCD* සරල රේඛා දෙක *A, B, D, C* ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තයක් ඡේදනය කරයි. මෙහි *O*, බාහිර ව පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. *X* හිදී දික් කළ *DA* හමු වන සේ *CB* ට සමාන්තර ව *O* හරහා රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. $OX^2 = AX \cdot DX$ බව සාධනය කරන්න.

   (ii) *O* යනු *ABC* ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි. *AO, BO, CO* රේඛා *BC, CA, AB* පිළිවෙලින් *D, E, F* හිදී හමු වේ නම්,

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

බව සාධනය කරන්න.

ABC යනු *B* හිදී සෘජු කෝණයක් සාදන ත්‍රිකෝණයකි. *B* සිට *AC* ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය *L* ද, *L* සිට *BC* සහ *AB* ට ඇඳි ලම්බවල අඩි පිළිවෙළින් *M* සහ *N* ද වේ. *AM* සහ *CN* රේඛා *O* හි දී හමු වන්නේ ද *BO* රේඛාව *P* හිදී *AC* හමු වන්නේ ද නම්,

(i) $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$

(ii) $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AB^4}{BC^4}$

බව සාධනය කරන්න.

2. (i) සමාන්තරාතිකයක විකර්ණ ඒකලක්ෂ්‍ය බව ද එකිනෙක සමච්ඡේදනය කරන බව ද පෙන්වන්න.

   (ii) *OABC* චතුස්තලයක *OA, OB, OC* දර එකිනෙකට ලම්බ වන අතර පිළිවෙලින් *a, b, c* ට සමාන වේ. *OAB* මුහුණතට *ABC* මුහුණතේ ආනතිය

$$\tan^{-1}\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

ABCDD'C'B'A' සෘජුකෝණාස්‍ර සමාන්තරාතිකයක *A'B'C'D'* මුහුණත *ABCD* මුහුණතට සමාන්තර වන අතර *AA', BB', CC', DD'* දර *ABCD* මුහුණතට ලම්බ වේ. *P, Q, R* යනු පිළිවෙළින් *AB, BD', DD'* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

$AA' = a$ ද $AB = b$ ද $AD = c$ ද නම් *ABCD* මුහුණත සමඟ *PQR* තලය සාදන කෝණය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. P ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වන l_1, l_2 සරල රේඛා පිළිවෙළින් $ax + by + c = 0$ සහ $a'x + b'y + c' = 0$ සමීකරණවලින් නිරූපණය වේ. λ පරාමිතියක් වන විට,

$$ax + by + c + \lambda (a'x + b'y + c') = 0$$

සමීකරණය විවරණය කරන්න.

l_1, l_2 ට සමාන්තර ව O මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ සරල රේඛා පිළිවෙළින් Q සහ R හිදී l_2, l_1 ඡේදනය කරයි. $OQPR$ සමාන්තරාස්‍රයේ OP, QR විකර්ණවල සමීකරණ සොයන්න. $(c, c' \neq 0)$
එනයින්,

(i) $OQPR$ රොම්බසයක් වීම සඳහාත්

(ii) $OQPR$ සමචතුරස්‍රයක් වීම සඳහාත්

a, b, c, a', b', c' නියත මගින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතා නිර්ණය කරන්න.

4. (අ) (r, θ) ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සිට කාටීසියානු ඛණ්ඩාංකවලට හැරවීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\frac{2a}{r} = \cos\theta + 2\sin\theta \qquad (a > 0)$$

මගින් l සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

එක ම සටහනෙහි, l හිත් $C : r = a(1 + \cos\theta)$ වක්‍රයේත් කටු සටහන් ඇඳ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න.

(ආ) $y = x^2 - 1$ වක්‍රයේ කටු සටහනක් ඇඳ එනයින්, $y = |x^2 - 1|$ හි කටු සටහනක් වෙන ම රූ සටහනක අඳින්න.

එක ම දළ රූ සටහනක $y = |x^2 - 1|$ සහ $y = |x^2 - 7|$ වක්‍ර ඇඳීමෙන්,

$$|x^2 - 7| > y > |x^2 - 1|$$

සපුරාලන පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

5. (i) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය සහ $l \equiv px + qy + r$ සරල රේඛාව A සහ B හිදී එකිනෙක ඡේදනය කරයි. λ පරාමිතියක් විට, $S + \lambda l = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න.

$$S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 17 = 0 \quad \text{සහ} \quad l \equiv x - y + 2 = 0$$

විට, AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

S' වෘත්තයත් $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ වෘත්තයත් බාහිර ව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

(ii) S වෘත්තය $(2, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර $S' : x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත පිහිටි විෂ්කම්භාන්තවල ලක්ෂ්‍යවල දී S' ඡේදනය කෙරේ. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ වෘත්තය සහ S වෘත්තය සෘජුකෝණී ලෙස ඡේදනය වේ නම්, S හි සමීකරණය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයා පරාවලයේ නාභියේ සිට ස්පර්ශකයට අඳින ලද ලම්බයේ අඩිය සැම විට ම y - අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

l_1, l_2, l_3 වනාහි පරාවලයකට ඇඳි ස්පර්ශක තුනකි. ඉහත ප්‍රතිඵලය යොදා ගෙන ජ්‍යාමිතික ක්‍රමයකින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, l_1, l_2, l_3 මගින් සෑදෙන ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ හරහා වූ වෘත්තය, පරාවලයේ නාභිය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

7. එය මත පිහිටි (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයක දී $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය,

$$a^2y_1\, x - b^2x_1\, y + (b^2 - a^2)\, x_1y_1 = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$(a^2 - b^2)^2\, l^2\, m^2 - (b^2\, l^2 + a^2\, m^2)\, n^2 = 0$$

වන්නේ නම්, $lx + my + n = 0$ රේඛාව ඉලිප්සයට අභිලම්බයක් වන බව සාධනය කර අභිලම්බය වක්‍රය කපන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ප්‍රථම ඉලිප්සය, එහි කේන්ද්‍රය වටා සෘජු කෝණයකින් ස්වකීය තලයේ භ්‍රමණය කිරීමෙන් දෙවැනි ඉලිප්සයක් ලැබේ. ඉලිප්ස දෙකට ම පොදු වූ අභිලම්බවල සමීකරණ සොයන්න.

8. P ලක්ෂ්‍යයක සිට $x + y = \sqrt{2}$ සරල රේඛාවට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය Q ද $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ඛණ්ඩාංක සහිත ලක්ෂ්‍යය S ද වේ.

$SP^2 = 2\ QP^2$ වන පරිදි P විචලනය වන්නේ නම්, එහි පථය කවරේක් ද යන වග හඳුන්වා දෙන්න.

$xy = 1$ බහුවලයට $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය x අක්ෂය A හිදී ද y අක්ෂය B හිදී ද ඡේදනය කරනු ලැබේ. C යනු $AC : CB = a : b$ වන පරිදි AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යි. t විචලනය වන විට, C හි පථයේ සමීකරණය සොයන්න.

$x + y = \sqrt{2}$ සරල රේඛාව C හි පථයට ස්පර්ශකයක් වන සේ $a : b$ අනුපාතයට ගත හැකි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

9. ඕනෑ ම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා, සුපුරුදු අංකනයකින්,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

බව සාධනය කරන්න.

D යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

$B\hat{A}D = \alpha$, $C\hat{A}D = \beta$ සහ $C\hat{D}A = \theta$ නම්,

$$\begin{aligned}(m + n)\cot\theta &= m\cot\alpha - n\cot\beta \\ &= n\cot B - m\cot C\end{aligned}$$

බව සාධනය කරන්න.

F යනු AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද L යනු A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය ද වේ. P හිදී CF සහ AL ඡේදනය වේ.

$$\tan A\hat{P}F = \frac{2 - \cot B\,(\cot A - \cot B)}{\cot A + \cot B}$$

බව සාධනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) $\cos(A + B)$ සඳහා සම්මත සූත්‍රය යොදා, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ බව පෙන්වන්න.

$\cos 2\theta \tan\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කර එ නයින්,

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කර $\cos\frac{3\pi}{5}$ සඳහා අගයක් ලබා ගන්න.

(ආ) $\tan(A - B) \equiv \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කරන්න.

x සඳහා, පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\tan x - \tan(x - \alpha) = \tan\alpha, \quad \alpha \neq 0$

(ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(2x) = \frac{\pi}{4}$

11. X සහ Y විචල්‍ය $Y = \dfrac{X - a}{b}$ වන පරිදි වේ ; මෙහි a සහ b ඥාත නියත වේ.

$\overline{X} = a + b\,\overline{Y}$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි "‾" යන්නෙන් සමාන්තර මධ්‍යනය හැඳින්වේ.

A ගමකින් හා B ගමකින් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් පවුල් 98 ක මාසික ආදායම පහත දැක්වෙන වගුවෙන් ගෙන දේ.

රු. 100 යේ ඒකකවලින් මාසික ආදායම	පවුල් සංඛ්‍යාව	
	A ගම	B ගම
5—10	1	5
10—15	10	6
15—20	20	15
20—25	8	10
25—30	6	5
30—35	3	4
35—40	1	2
40—45	0	2

එක් එක් ගමක් සඳහා මධ්‍යනය, මධ්‍යකය සහ මාතය සොයා ඔබේ ප්‍රතිඵල ගැන විවේචනයක් කරන්න.

12. A, B ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙකු ටෙනිස් තරඟයක යෙදේ. ඔවුන් අතරෙන් කෙනෙකු ක්‍රීඩා වාර (sets) දෙකක් දිනන තෙක් තරඟය පැවැත්වේ. ඕනෑ ම ක්‍රීඩා වාරයක් A දිනීමේ සම්භාවිතාව 0.40 වේ.

(අ) (i) A තරඟය දිනීමේ

(ii) අනුගාමී ක්‍රීඩා වාර දෙකකින් B පරාජය කිරීමෙන් A තරඟය දිනීමේ

සම්භාවිතාවන් සොයන්න.

(ආ) තරඟයේ දී ක්‍රීඩා කෙරුණු ක්‍රීඩා වාර ගණන X සසම්භාවී විචල්‍යයෙන් හැඳින්වේ නම්, X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා, එනයින් තරඟයක දී ක්‍රීඩා කෙරෙන අපේක්ෂිත ක්‍රීඩා වාර ගණන (X හි මධ්‍යනය) සොයන්න.

(ඇ) එක් ක්‍රීඩා වාරයකට පැය එකහමාරක කාලයක් ගත වන අතර, ක්‍රීඩා සංගමය මඟින් සපයන පහසුකම් සඳහා සංවිධායක කමිටුව පැයකට රු. 1000/= ක් ගෙවිය යුතු ය. තරඟය සඳහා වැය වන මුදල Y සසම්භාවී විචල්‍යයෙන් දක්වේ නම් Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා, එනයින් අපේක්ෂිත වියදම (Y හි මධ්‍යනය) සොයන්න.

ast Papers Wiki - Most Extensive Wikipedia of Past Paper