01. (a) $P(x) = x^3 - 2\lambda x + 2\lambda - 1$

සමීකරණයේ විවේචකය $\Delta = 4\lambda^2 - 4.1.(2\lambda - 1)$

$= 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$

$= 4(\lambda - 1)^2 \geq 0;\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\therefore P(x) = 0$ හි මූල සැමවිටම ඇත.

$P(x) = 0$ හි මූල α හා β යයි ගනිමු.

එවිට $\alpha + \beta = 2\lambda$ හා $\alpha\beta = 2\lambda - 1$

$\alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2$ නම්

$\alpha + \beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

එනම් $2\lambda = 4\lambda^2 - 2(2\lambda - 1)$

$\Rightarrow 4\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$

$\therefore \lambda = \frac{1}{2}$ හෝ $\lambda = 1$

λ හි අවශ්‍ය අගයන් $\lambda = \frac{1}{2}$ හා $\lambda = 1$ වේ.

(b) $P(x)$, $(x - 1)$, $(x - 2)$ හා $(x - 3)$ න් බෙදිවිට

සමීකරණ නිසිවෙලින් 1, $\frac{1}{2}$ හා $\frac{1}{3}$ බැරින්

$P(1) = 1,\ P(2) = \frac{1}{2}$ හා $P(3) = \frac{1}{3}$

$Q(x) = x\,P(x) - 1$ නම්

$Q(1) = 1.P(1) - 1$

$= 1 - 1 = 0$

$\therefore (x - 1),\ Q(x)$ හි සාධකයකි.

$Q(2) = 2.P(2) - 1$

$= 2.\frac{1}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow (x - 2),\ Q(x)$ හි සාධකයකි.

$Q(3) = 3.\frac{1}{3} - 1 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)$ ද $Q(x)$ හි සාධකයක් වේ.

$Q(x) = x\,P(x) - 1$ ද $P(x)$ යන දෙපැත්ත ම බැගින් $Q(x)$ හතරවන මාත්‍රයේ වේ.

එවිට $Q(x) = k(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකිය.

එවිට $k(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x\,P(x) - 1$

$x = 0$ වීට $k(-1)(-2)(-3) = -1$

$k = \frac{1}{6}$

$\therefore Q(x) = \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

02. (a) ප්‍රශ්න තෝරා ගන්නා ආකාර ගණන වීට අවශ්‍ය

$= {}^9C_6 = \frac{9!}{3!\,6!}$

$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!}$

$= 84$

(i) මුල් ප්‍රශ්න තුන ලියාපාරියෙන් එක බීට ප්‍රශ්න 4 බැගින් එක හා සමාන බීවිකල්ප

$= {}^6C_3 = \frac{6!}{3!\,3!}$

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$

(ii) අවම වශයෙන් මුල් ප්‍රශ්න 5 න් පෙරාගැනීම් සඳහා එක් ක්‍රමවේදයක් අනුව ලැබිය හැකි විකල්ප ගණන පහත

- මුල් ප්‍රශ්න 5 හ තෝරාගැනීම් 4 න් එකකි
- මුල් ප්‍රශ්න 5 න් තෝරාගැනීම් නොකොට 4 ම තෝරාගැනීම්

එම නිසා එවන් ප්‍රශ්න 4 න් තෝරා ගැනීම් සඳහා ක්‍රම ගණන

$= 1 \times {}^4C_1 + {}^5C_4 \times {}^4C_2$

$= 1 \times 4 \cdot \frac{5!}{4!\,1!} \times \frac{4!}{2!\,2!}$

$= 4 + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1}$

$= 4 + 30 = 34$

(b) $(1 + 7x)^{23} = A_0 + A_1x + \ldots + A_rx^r + \ldots + A_{23}x^{23}$

මෙහි $A_r = {}^{23}C_r.7^r$

(i) $\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{{}^{23}C_{r+1}\,7^{r+1}}{{}^{23}C_r\,7^r}$

$= 7 \cdot \frac{23!}{(22 - r)!\,(r + 1)!} \cdot \frac{(23 - r)!\,r!}{23!}$

$= \frac{7(23 - r)}{(r + 1)}$

$= \frac{161 - 7r}{r + 1}$

$\frac{A_{r+1}}{A_r} \gtrless 1 \Leftrightarrow \frac{161 - 7r}{r + 1} \gtrless 1$

$\Leftrightarrow 161 - 7r \gtrless r + 1$

$\Leftrightarrow 160 \gtrless 8r$

$\Leftrightarrow 20 \gtrless r$

එනම් $r < 20 \Rightarrow A_{r+1} > A_r$

$r = 20 \Rightarrow A_{r+1} = A_r$

$r > 20 \Rightarrow A_{r+1} < A_r$

$\therefore$ විශාලතම සංඛ්‍යාංකය $A_{21} = A_{20}$

$\therefore$ ප්‍රකාශනයේ විශාලතම සංඛ්‍යාංකය

$A_{20} = A_{21} = {}^{23}C_{20} \cdot 7^{20}$

$= 1771 \times 7^{20}$

සංඛ්‍යාත්මකව විශාලතම සංඛ්‍යාංකය එමින් ද එහිදීම ප්‍රකාශනයේ 21 වන හා 22 වන පද ද වේ.

(ii) $(1 + 7x)^{23}$ ප්‍රසාරණයේ $r + 1$ වන පදය T_{r+1}

නම් $T_{r+1} = {}^{23}C_r\,(7x)^r = {}^{23}C_r\,7^r\,x^r$

විශාලතම පදය T_4 වනවිට

$T_3 < T_4 > T_5$

$\Rightarrow {}^{23}C_2\,7^2\,x^2 < {}^{23}C_3\,7^3x^3$

හා ${}^{23}C_3\,7^3\,x^3 > {}^{23}C_4\,7^4\,x^4$

$\Rightarrow \frac{23!}{21!\,2!} < \frac{23!}{20!\,3!}\,7x$ හා

$\frac{23!}{19!\,4!}\,7x < \frac{23!}{20!\,3!}$

$\Rightarrow \frac{23!}{2!\,20!\,2!} < \frac{23!}{20!\,3!\,2!}\,7x$ හා

$\frac{23!}{19!\,3!\,4!}\,7x < \frac{23!}{20!\,3!}$

$\Rightarrow \frac{1}{49} < x$ සහ $x < \frac{1}{35}$

$\Rightarrow \frac{1}{49} < x < \frac{1}{35}$

03. (a) $n = 1$ වීට

$L.H.S = \frac{1}{3}$, $R.H.S = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{18 - 6 - 4}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

එබැවින් $n = 1$ වීට ප්‍රකිඥාව සත්‍ය වේ.

$n = P$ වීට ප්‍රකිඥාව සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට P පදු වන තිබිලාසේ

$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{(P + 1)^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(P + 1)} - \frac{1}{2(P + 2)}$

දෙවෙනුවෙන් $\frac{1}{(P + 2)^2 - 1}$ වශයෙන් තිබෙන්නේ

$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{(P + 1)^2 - 1} + \frac{1}{(P + 1 + 1)^2 - 1}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(P + 1)} - \frac{1}{2(P + 2)} + \frac{1}{(P + 2)^2 - 1}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(P + 1)} - \frac{1}{2(P + 2)} + \frac{1}{(P + 1)(P + 3)}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(P + 1)} - \frac{1}{2(P + 2)} + \frac{1}{2(P + 1)} - \frac{1}{2(P + 3)}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(P + 1 + 1)} - \frac{1}{2(P + 1 + 2)}$

$\therefore n = P$ වීට ප්‍රකිඥාව සත්‍ය නම් $n = P + 1$ වීට ද සත්‍ය වේ.

$\therefore$ ගණිත අනුගමන මූලධර්මය අනුව ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා n සඳහා ප්‍රකිඥාව සත්‍ය වේ.

$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r + 2)}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r + 1)^2 - 1}$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n + 1)} - \frac{1}{2(n + 2)}\right]$

$= \frac{3}{4}$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r + 2)}$ අභිසාරී වේ.

එහි අගය $= \frac{3}{4}$

(b) $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -(x - 1) & x < 1 \end{cases}$

$\left|\frac{1}{2}x + 1\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & x \geq -2 \\ -\left(\frac{1}{2}x + 1\right) & x < -2 \end{cases}$

(i) $x < -2$ වීට

අසමානතාවය $-(x - 1) + \frac{3}{2} + 1 < 1$ බවට පත්වේ.

එනම් $x > 2$ වේය වීය නොහැක.

(ii) $-2 \leq x < 1$ වීට

අසමානතාවය

$-(x - 1) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) < 1$ බවට පත්වේ.

එනම් $x > -\frac{2}{3}$

එහෙත් පිළිපු $x \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ අසමානතාවයේ විසඳුම් නේ.

(iii) $x \geq 1$ වීට

අසමානතාවය $(x - 1) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) < 1$ බවට පත්වේ.

එනම් $x < 6$

එහෙත් පිළිපු $x \in [1, 6)$ අසමානතාවය වේ විසඳුම් වේ.

$\therefore$ අසමානතාවය සපුරාලන පිළිපු x හි අගය සුළුවන

$\left\{x : -\frac{2}{3} < x < 6\right\} = \left(-\frac{2}{3}, 6\right) \rightarrow$

විශාලතම පූර්ණ සංඛ්‍යාව වීනම් 5 වේ.

04. $2z^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)^2 = -1 + \sqrt{3}i$

$= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

දෙකින් $2z^2$ හි මාපාංකය 2 සහ ප්‍රධාන විස්තාරය $\frac{2\pi}{3}$ බව පැහැදි.

$\frac{3}{z^2} = \frac{3 \times 2}{(-1 + \sqrt{3}i)} = \frac{6}{(-1 + \sqrt{3}i)} \times \frac{(-1 - \sqrt{3}i)}{(-1 - \sqrt{3}i)}$

$= \frac{6}{(1+\sqrt{3})}(-1-\sqrt{3}\,i)$

$= \frac{3}{2}(-1-\sqrt{3}\,i) \quad = 3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

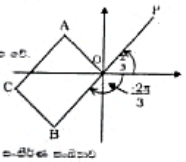
මෙයින් $\frac{3}{z^2}$ හි මාපාංකය 3 වූවාම විස්තාරය $-\frac{2\pi}{3}$

p ලක්ෂ්‍යය z සංඛ්‍යාව නියෝජනය කරන්නේ යැයි ගනිමු.

$P\hat{O}B = \left|\text{Arg } Z - \text{Arg}\left(\frac{3}{z^2}\right)\right|$

$= \left|\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right|$

$= \pi$



$\therefore$ P, O, B ලක්ෂ්‍ය එකම සරල රේඛාවක පිහිටයි.

C හෙත් නියෝජනය වන සංඛ්‍යාව සමීකරණයෙන්

$= 2z^2 + \frac{3}{z^2}$

$= -1 + \sqrt{3}\,i - \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}\,i)$

$= -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$

CO හි දිග $= \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{28}}{2} = \sqrt{7}$

AB හි දිග $= \left|2z^2 - \frac{3}{z^2}\right|$

$= \left|-1+\sqrt{3}\,i+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right|$

$= \left|\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right|$

$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{75}{4}} = \sqrt{19}$

05. (a) $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$

$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(-2\sin 2x + 2\cos 2x) + (\cos 2x + \sin 2x)(-e^{-x})$

$= e^{-x}(-3\sin 2x + \cos 2x)$

$\frac{dy}{dx} + y = -3e^{-x}\sin 2x + e^{-x}\cos 2x + e^{-x}\cos 2x + e^{-x}\sin 2x$

$= 2e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x$

$= 2e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2e^{-x}(-2\sin 2x - 2\cos 2x) + 2(\cos 2x - \sin 2x)(-e^{-x})$

$= -4e^{-x}(\sin 2x + \cos 2x)$

$= -2e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)$

$= -4y - \left(\frac{dy}{dx} + y\right)$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \qquad p = 2 \quad q = 2$

$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = 0$

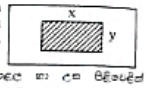
$y(0) = 1, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 1,$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = -2\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} - 5y(0) = -7$

$\therefore \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = -2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$

$= +14 - 5 = 9$

(b) මුද්‍රිත සෘජුකෝණාස්‍රයේ කොටසේ පළල x cm හා උස y cm වශයෙන් ගනිමු.



එවිට කෝස්ටරයේ පළල හා උස පිළිවෙළින් $(x+12)$ cm හා $(y+16)$ cm වේ.

එවිට කෝස්ටරයේ වර්ගඵලය $A = (x+12)(y+16)$ හා $xy = 972$ බව දී ඇත.

$\therefore A(x) = (x+12)\left(\frac{972}{x}+16\right)$

$A'(x) = (x+12)\left(\frac{-972}{x^2}\right) + \left(\frac{972}{x}+16\right)$

$A'(x) = \frac{-12\times 972}{x^2} + 16$

$= \frac{16x^2 - 16\times 27^2}{x^2}$

$= \frac{16(x^2 - 27^2)}{x^2}$

$A'(x) = 0$ වීට $x = \pm 27$

x ධන නිසැකි $x = 27$

දැන් $A'(x)$ $= \frac{16(x-27)(x+27)}{x^2}$

$0 < x < 27$ වීට $A'(x) < 0$

$27 < x$ වීට $A'(x) > 0$

$\therefore A(x)$ ට $x = 27$ වීට අවමයක් ඇත.

කෝස්ටරයේ වර්ගඵලය අවම වීට $x = 27$ හා අනුරූප $y = \frac{972}{27} = 36$

$\therefore$ කෝස්ටරයේ මිනුම් 39 cm × 52 cm වේ.

06. (a) $I = \int_{11}^{23} \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+3}}\,dx$

$t = \sqrt{2x+3}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $t^2 = 2x+3$ හා $2t\,dt = 2\,dx$ වේ.

දැන් $x+1 = \frac{t^2-3}{2} + 1 = \frac{t^2-1}{2}$ හා

$x = 11$ වීට $t = 5$ හා $x = 23$ වීට $t = 7$

එවිට

$I = \int_5^7 \frac{2\,dt}{t^2-1} = \int_5^7 \frac{2\,dt}{(t-1)(t+1)}$

$= 2\int_5^7 \left[\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right] dt$

$= \int_5^7 \frac{dt}{t-1} - \int_5^7 \frac{dt}{t+1}$

$= \left[\ln|t-1|\right]_5^7 - \left[\ln|t+1|\right]_5^7$

$= \ln\frac{6}{4} - \ln\frac{8}{6}$

$= \ln\frac{9}{8}$

(b) $J = \int e^{3x}\cos 4x\,dx$

$= \int e^{3x}\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]dx$

$= e^{3x}\frac{\sin 4x}{4} - \int\frac{\sin 4x}{4}\frac{d}{dx}(e^{3x})\,dx$

$= e^{3x}\frac{\sin 4x}{4} - \frac{3}{4}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$

$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin 4x - \frac{3}{4}\left(\frac{-e^{3x}\cos 4x}{4}\right) - \frac{3}{4}\int\frac{\cos 4x}{4}\frac{d}{dx}(e^{3x})\,dx$

$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin 4x + \frac{3}{16}e^{3x}\cos 4x - \frac{3}{16}\int\cos 4x\cdot 3e^{3x}dx$

$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin 4x + \frac{3}{16}e^{3x}\cos 4x - \frac{9}{16}\int e^{3x}\cos 4x\,dx$

$16J = 4e^{3x}\sin 4x + 3e^{3x}\cos 4x - 9J$

$25J = e^{3x}[4\sin 4x + 3\cos 4x]$

$J = \frac{e^{3x}}{25}[4\sin 4x + 3\cos 4x]$

$\therefore \int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{e^{3x}}{25}[4\sin 4x + 3\cos 4x] + C$

එහි C අඩංගය නියතයකි.

(c) $\int\sin^4 2x\,dx = \int\left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int(1-2\cos 4x + \cos^2 4x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\int(1-2\cos 4x + \frac{1}{2}(1+\cos 8x))\,dx$

$= \frac{1}{8}\int(3-4\cos 4x + \cos 8x)\,dx$

$= \frac{3}{8}x - \frac{4\sin 4x}{4\times 8} + \frac{\sin 8x}{8\times 8} + C$

$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} + C$

එහි C අඩංගය නියතයකි.

07. u හා v මියන් කෝස්ටරයේ යටි දාරයේ අනුක්‍රමණය m යැයි ද ගනිමු.

එවිට කියාගේ සමීකරණය පිළිවෙළින් $y = m(x-5)$ හා $y = m(x+5)$ වේ.

$\left.\begin{aligned} y &= mx - 5m \\ 3y + 4x &= 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{25+15m}{4+3m}$ හා

$y = \frac{5m}{4+3m}$

එහෙයින් $P = \left[\frac{25+15m}{4+3m}, \frac{5m}{4+3m}\right]$

එලෙසම

$\left.\begin{aligned} y &= mx + 5m \\ 3y + 4x &= 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{25-15m}{4+3m}$

හා $y = \frac{45m}{4+3m}$

$Q = \left(\frac{25-15m}{4+3m}, \frac{45m}{4+3m}\right)$

එවිට $PQ^2 = \left(\frac{25+15m}{4+3m} - \frac{25-15m}{4+3m}\right)^2 + \left(\frac{5m}{4+3m} - \frac{45m}{4+3m}\right)^2$

$= \frac{900\,m^2}{(4+3m)^2} + \frac{1600\,m^2}{(4+3m)^2}$

$= \left(\frac{50\,m}{(4+3m)}\right)^2 = 5^2$

$\frac{10\,m}{4+3m} = \pm 1 \Rightarrow m = \frac{4}{7}$ හෝ $m = -\frac{4}{13}$

m සඳහා විකල්පව සාධාරණත්වය ඇතත් දෙවෙනි අවස්ථාව ගැනීමේ u හා v සඳහා වීය හැකි වරහා යුගල දෙකක් ඇත.

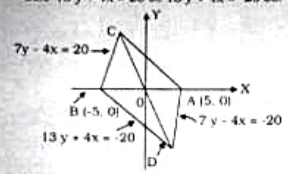
එක් යුගලයක් $y = \frac{4}{7}(x-5)$ හා $y = \frac{4}{7}(x+5)$

එනම් $7y - 4x = -20$ හා $7y - 4x = 20$

වන අතර අනෙක් යුගලය

$y = -\frac{4}{13}(x-5)$ හා $y = -\frac{4}{13}(x+5)$

ඒකෙ 13 y + 4x = 20 සහ 13 y + 4x = -20 වේ.



සම්මාත්‍රයෙන් රේඛා වියරේඛය සේකරණය $y = 0$ වන අතර එම අක්ෂය $(0, 0)$ වේ.

අනෙක් වියරේඛය

$7y - 4x + 20 + \lambda (13 y + 4x + 20) = 0$

අතර වේ.

මෙය මූලය සමඟ යන බැවින්

$\lambda = -1$

එවිට අදාල වියරේඛය $3y + 4x = 0$

$\left.\begin{matrix} 7y - 4x = 20 \\ 3y + 4x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 2$ හා $x = -\frac{3}{2}$

$\therefore C = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

ACBD චතුරස්‍රයෙන් වර්ගඵලය

$= 2 \times ABC \Delta$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 10$

$= 20$ වර්ග ඒකක

04. $S_1 = x^2 + y^2 - 2 = 0$

$S_2 = x^2 + y^2 + 3x + 3y - 8 = 0$

$S_1 = 0$; කේන්ද්‍රය $C_1 = (0, 0)$

අරය $r_1 = \sqrt{0 + 0 + 2} = \sqrt{2}$

$S_2 = 0$; කේන්ද්‍රය $C_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

අරය $r_2 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 8} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore C_1C_2 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ හා

$r_2 - r_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$r_2 - r_1 = C_1C_2$ බැවින්

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ අභ්‍යන්තරයෙන් ස්පර්ශ වේ.

ස්පර්ශ ලක්ෂය (x_0, y_0) හා විට

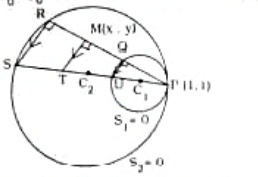
(x_0, y_0), $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ අතර පිහිටි.

$\therefore 3x_0 + 3y_0 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 + y_0 = 2$

සාධ්‍ය C_1 හා C_2 හා සමඟ $y = x$ සේකරණය කළ වේ.

$\Rightarrow y_0 = x_0$

$\therefore x_0 = y_0 = 1$ හා $P = (1, 1)$ වේ.



P, C_1, C_2 ලක්ෂය යා කළ රේඛාව U හා S ලදී

සිලිංඩරීන් $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ සඳහා යටි කිරීම

$S = (x_1, y_1)$ අදහස් කරයි.

එවිට $\frac{x_1 + 1}{2} = -\frac{3}{2}$ සහ $\frac{y_1 + 1}{2} = -\frac{3}{2}$ බැවින්

$x_1 = -4$, $y_1 = -4$ වේ $\Rightarrow S = (-4, -4)$

සාධ්‍ය $U = (-1, -1)$ හා SU හි රේඛාව ලක්ෂය T නම්

$T = \left(\frac{-4 + -1}{2}, \frac{-4 + -1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

QR හි රේඛාව ලක්ෂය M (x, y) නම්

TP විෂ්කම්භය වූ රේඛාව හා M හිදීය.

TP හි රේඛාව ලක්ෂය $= \left(\frac{-3}{4}, \frac{-3}{4}\right)$

එවිට $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2$

$= \left(\frac{-3}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{-3}{4} - 1\right)^2$

$= \left(-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(-\frac{7}{4}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{9}{8} = \frac{49}{8}$

ඒකෙ $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - 5 = 0$

$\therefore$ M හි රේඛාව

$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - 5 = 0$

09. (a) $\sin\theta \tan\theta - 2(1 - \cos\theta)$

$= \frac{\sin^2\theta - 2\cos\theta(1 - \cos\theta)}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1}{\cos\theta}$

$= \frac{(\cos\theta - 1)^2}{\cos\theta} > 0 \quad \because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(b) $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$

$\tan\frac{\pi}{24} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$

$= \frac{1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

$= \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})} \times \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$

$= \frac{4\sqrt{6} - 6 - \sqrt{12} + 4\sqrt{2} - \sqrt{12} - 2}{4}$

$= \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{12} - 8}{4}$

$= \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2)}{4}$

$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2}{2}$

(c) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{\lambda}$

$\therefore a = \lambda \sin A$, $b = \lambda \sin B$, $c = \lambda \sin C$

$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\lambda^2\sin^2 A - \lambda^2\sin^2 B}{\lambda^2 \sin^2 C}$

$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 (A + B)}$

$= \frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{\sin^2 (A + B)}$

$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \cdot 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin^2 (A + B)}$

$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \cdot 2\sin\frac{(A-B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}}{\sin^2 (A + B)}$

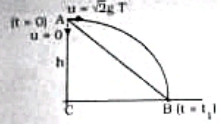
$= \frac{\sin(A + B)\sin(A - B)}{\sin^2 (A + B)}$

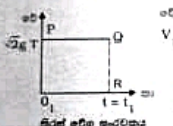
$= \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$

*** ***

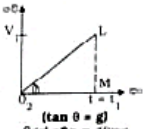
01. (a) ඉගැන්වීම ඔස්සේ ඔබගත වන කැබිනේ. නිවස පුදාවන සංවේගය නිගමනය කරන්න.

ඉංග්‍රීසි වලින් පරිවර්තනය





නිවස වේග සංවේගය



(tan θ = g)
නිවස වේග සංවේගය

$AB = \frac{3}{2} g T^2$ බව දී ඇත. $\square O_1 PQR$

$= CB \times \Delta O_2 LM = AC$ බව

$CB = O_1PQR\square = \sqrt{2} g T t_1$

$AC = O_2LM \Delta$

$= \frac{1}{2} V_1 t_1$ මෙහි $g = \frac{V_1}{t_1}$ බව

$AC = \frac{1}{2} g t_1^2 = h$

$AC^2 + CB^2 = AB^2$ යැවීන්

$\frac{1}{4} g^2 t_1^4 + 2 g^2 T^2 t_1^2 = \frac{9}{4} g^2 T^4$ බව.

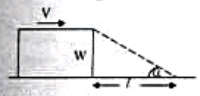
$g^2 \neq 0$ නිසා $t_1^4 + 8 t_1^2 T^2 - 9 T^4 = 0$

$(t_1^2 - T^2)(t_1^2 + 9T^2) = 0$

$\therefore t_1 = T$ බව.

එවිට $AC = h = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} gT^2$ බව

(b)



(සං E) $= \rightarrow V$

(ම E) $= u$

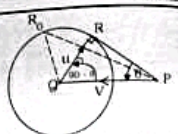
(ම සං) $= (ම E) + (E සං)$

$= u + \overrightarrow{V}$

$= \overrightarrow{V} + u$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$



Q පෙන්වූ පුදේ u අග්‍ර පුදේ ද පාත්‍රයක්ම R පිහිටයි.

මෙහිදී රේඛාව සෘජුස්වරූපව පිහිටියේ පළිය හැඩ.

මෙහිදී රේඛාව වඩාත් පහසුවෙන් ඇඳීමට $Q\hat{P}R$ වැදගත් වනවිය. එනම් PR රේඛාව අඳන ලී වැස්සකට සිරස්කෝණයක් වන විය.

$Q\hat{P}R = \theta$ නම්, කිසියම් ආරම්භයාවරට පහ ඇඳ, ඒකට හැකි වන්නේ $\theta > \alpha$ නම් ය

එවිට $\sin\theta > \sin\alpha$

$\frac{u}{V} > \sin\alpha$ (PQR Δ න්)

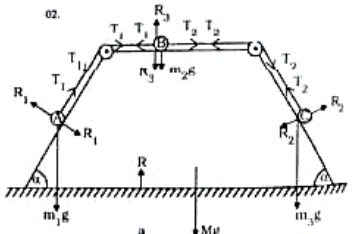
එනම් $u > V \sin\alpha$ නම් ය

එමෙහි $\tan\alpha = \frac{W}{l}$ බව

$u = V \sin\alpha$ නම් $\theta = \alpha$ වන අතර

පොළවට සාමේක්ෂව ඇඳියාගේ පළිය දිශාව සාගේ පළිය දිශාව සමඟ $90 - \theta = 90 - \alpha$ පෙන්නෙන් සඳහා අතර යන්නවිත් පහසු ඉදිරියෙන් පසු ඇතා විය හැකිය PQR ත්‍රිකෝණ සිමාන්තරේ QR තබය කරන පොළවට සාමේක්ෂ සම්ප්‍රයෝජ්‍ය දක්වයි

02.



(A සූ) $= \overrightarrow{a_1}$ (සූ E) $= \rightarrow a_2$

(B සූ) $= \leftarrow a_1$

(C සූ) $= \overrightarrow{a_1}$

කැබිනේ ඇඳියාගේ A, B, C ඇඳුණේ ඇඳියාගේ සාමේක්ෂ ස්ථිරණ විභාගයෙන් සමාන වේ.

(A E) $= \overrightarrow{a_1} + \rightarrow a_2$; (B E) $= \leftarrow a_1 + \rightarrow a_2$

$F = ma$ බොළුණ (C E) $= \overrightarrow{a_1} + \rightarrow a_2$

(A) $\overrightarrow{a_1}$ $m_1 g \sin\alpha - T_1$

$= m_1 (a_1 - a_2 \cos\alpha)$ ⟶ ①

(B) $\leftarrow T_1 - T_2 = m_2 (a_1 - a_2)$ ⟶ ②

(C) $\overrightarrow{a_2}$ $T_2 - m_3 g \sin\alpha$

$= m_3 (a_1 - a_2 \cos\alpha)$ ⟶ ③

පද්ධතියට $\rightarrow 0 = Ma_1 + m_1 (a_2 - a_1 \cos\alpha) + m_2 (a_2 - a_1) + m_3 (a_2 - a_1 \cos\alpha)$ ⟶ ④

B අංශුවේ ස්කන්ධය නොසලකිය හැකි නම්, එනම් $m_2 = 0$ නම්. ② න් $T_1 = T_2$ බව පැහැදි

නොසලකන් ස්කන්ධය නොසලකිය හැකිනම් $M = 0$ වේ

(A) ○ $R_1 - m_1 g \cos\alpha$

$= m_1 (-a_2 \sin\alpha)$

$R_1 = m_1 (g \cos\alpha - a_2 \sin\alpha)$

$T_1 = T_2$ නිසා ① න් $m_1 g \sin\alpha - T$

$= m_1 (a_1 - a_2 \cos\alpha)$ ⟶ ⑤

③ න් $T - m_3 g \sin\alpha$

$= m_3 (a_1 - a_2 \cos\alpha)$ ⟶ ⑥

⑤ + ⑥ න් $g \sin\alpha (m_1 - m_3)$

$= a_1 (m_1 + m_3) - (m_1 + m_3) a_2 \cos\alpha$ ⟶ ⑦

④ න් ○ $= a_2 (m_1 + m_3) - (m_1 + m_3) a_1 \cos\alpha$ ⟶ ⑧

⑦ × $\cos\alpha$ + ⑧ න්

$g \sin\alpha \cos\alpha (m_1 - m_3)$

$= a_2 [m_1 + m_3 - a_2 (m_1 + m_3) \cos^2\alpha$

$= a_2 (m_1 + m_3)(1 - \cos^2\alpha)$

$g \sin\alpha \cos\alpha (m_1 - m_3)$

$= a_2 (m_1 + m_3) \sin^2\alpha$

$\therefore a_2 = \frac{g \cos\alpha (m_1 - m_3)}{(m_1 + m_3) \sin\alpha}$

$\therefore R_1 = m_1 \left[g \cos\alpha - \frac{g \cos\alpha (m_1 - m_3)}{(m_1 + m_3) \sin\alpha} \sin\alpha \right]$

$R_1 = m_1 \left[\frac{m_1 + m_3 - (m_1 - m_3)}{(m_1 + m_3)} \right] g \cos\alpha$

$= \frac{2 m_1 m_3 g \cos\alpha}{m_1 + m_3}$

C ○ $F = ma$ යෙදීමට

$R_2 - m_3 g \cos\alpha$

$= m_3 (+ a_2 \sin\alpha)$

$R_2 = m_3 (g \cos\alpha + a_2 \sin\alpha)$

$= m_3 \left[g \cos\alpha + g \frac{\cos\alpha (m_1 - m_3) \sin\alpha}{(m_1 + m_3) \sin\alpha} \right]$

$= m_3 \left[\frac{m_1 + m_3 + m_1 - m_3}{m_1 + m_3} \right] g \cos\alpha$

$= \frac{2 m_1 m_3 g \cos\alpha}{m_1 + m_3}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

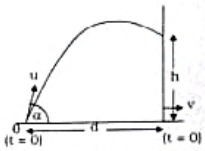
නොසැලකිය $F = ma$ යෙදීමෙන්

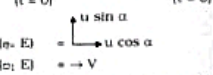
$\rightarrow R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\alpha = 0 \times a_2$

$\therefore R_1 = R_2$

එබැවින් එක් අංශුවක් නොසැලකිය එවිට අනෙක් අංශුව නොසැලකිය හැක

03. (a)



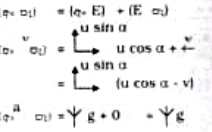


(ඇ E) $=$

(ඩ E) $= \rightarrow V$

ඇඳියේ ඒකාකාර වේගයෙන් වලනය වන බැවින්, ඇඳියේට සාමේක්ෂව අංශුවේ වලිතය සලකමු.

(ඇ ඩ) $=$ (ඇ E) + (E ඩ)



(ඇ $\overset{a}{ඩ}$) $= \downarrow g + 0 = \downarrow g$

$t = t_1$ විට අංශුව ඇඳියේගේ සාමේක්ෂ නම්,

$S = ut + \frac{1}{2} at^2$ යෙදීමෙන්

$\rightarrow S = d, u = u \cos\alpha - v, a = 0, t = t_1$

$d = (u \cos\alpha - v) t_1$ ⟶ ①

$\uparrow S = h, u = u \sin\alpha, a = -g, t = t_1$

$h = u \sin\alpha\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$ ⟶ ②

① න් $t_1 = \frac{d}{u \cos\alpha - v}$

② න් $h = u \sin\alpha \frac{d}{u \cos\alpha - v} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{(u \cos\alpha - v)^2}$

$2(u\cos\alpha - v)^2 h$
$= 2du\sin\alpha(u\cos\alpha - v) - gd^2$

$gd^2 + 2(u\cos\alpha - v)^2 h - 2du\sin\alpha$
$(u\cos\alpha - v) = 0$ ——— ③

$d > \frac{2u}{g}\sin\alpha(u\cos\alpha - v)$ නම්.

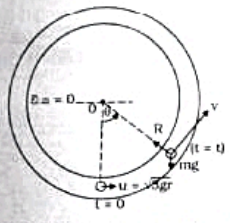
එනම් $gd > 2u\sin\alpha(u\cos\alpha - v)$ විට

③ සි $h = \frac{2du\sin\alpha(u\cos\alpha - v) - gd^2}{2(u\cos\alpha - v)^2}$ බැවින්

සහ $h = \frac{d[2u\sin\alpha(u\cos\alpha - v) - gd]}{2(u\cos\alpha - v)^2} < 0$ වේ.

එනම් වෙනව් පැත්තට නා පොහොරවේ.

(b)



එනම් ඉංගුව වලනය වන විට එය ඒක ම්ලිය කවුු ලම්බයන් R සහ mg වේ තත්ත්ව R වලනය වන දිශාවට ලම්බක බැවින් එහි සංරචක ශුන්‍යයක් ඉගැන්වීම බලය සංස්ථිතික බැවින් සෙති සංස්ථිති නියමය වෙදීය හැක.

ඒ. කැ. සි. වෙදීමෙන්

$\frac{1}{2}m.3gr - mgr = \frac{1}{2}mv^2 - mgr\cos\theta$

$v^2 = gr(1 + 2\cos\theta)$ ——— ①

$\overleftarrow{F} = m\underline{a}$ වෙදීමෙන්

$R - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$

$R = \frac{m}{r}gr(1 + 2\cos\theta) + mg\cos\theta$

$R = mg(1 + 3\cos\theta)$ ——— ②

ප්‍රතික්‍රියාව දිශාව වෙනස් වන්නේ $R = 0$ වන අවස්ථාවේදීය.

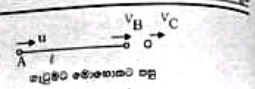
එවිට ② සි $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ වේ.

ඒ අවස්ථාවේදී වේගය $\sqrt{gr\left(1 - \frac{2}{3}\right)}$ ① සි

$= \sqrt{\frac{gr}{3}}$ වේ.

04. (a)

ගැටුමට පෙරහාතව වෙග



ගැටුමට අවරහාතව වග

ගම. ආ. සංස්ථිති මූලධර්මයෙන්

$mu + M \times 0 = mV_B + MV_C$

$mu = mV_B + MV_C$ ——— ①

ගැ. ප. නියමයෙන්

$eu = V_C - V_B$ ——— ②

① - ② × M

$mu - Meu = mV_B + M\cancel{V_C} - M\cancel{V_C} + MV_B$

$V_B = u\frac{(m - eM)}{m + M}$

දැන් B ව සාපේක්ෂව A හෝ වලිතය සලකමු

$(A^VB) = (A^VE) + (E^VB)$

$\therefore (A^VB) = \rightarrow u + \leftarrow V_B = [u - V_B] \rightarrow$

$u - V_B = u - u\frac{(m - eM)}{m + M}$

$= \frac{\mu mu - Mu + eu M}{m + M}$

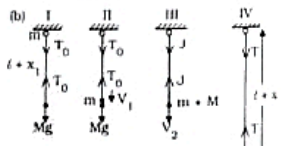
$= \frac{Mu(1 + e)}{m + M}$

මේ අනුව A සහ B ගැටීමෙන් B ව සාපේක්ෂව A මෙම ස්ථිතයෙන් ℓ දුරක් යාමේදීය ප්‍රලය ව වලන කාලය වනුයේ $t = t_1$ නම්

$t_1 = \frac{\ell}{\sqrt{Mu(1 + e)/(m + M)}}$

$= \frac{\ell(m + M)}{\sqrt{Mu(1 + e)}}$

(b)



I අවස්ථාව

$T_0 = Mg$ ——— ①

විතතිය x_1 නම්

$T_0 = \frac{2Mgx_1}{\ell}$ ——— ②

① සහ ② සි $Mg = \frac{2Mgx_1}{\ell}$ $\therefore x_1 = \frac{\ell}{2}$

II අවස්ථාව

m සිටුව $\ell + x_1 = \frac{3\ell}{2}$ දුරක් ගැටීමේදී, $v_1^2 = 2g\frac{3\ell}{2}$

$v_1^2 = 3g\ell$

III අවස්ථාව

ගැටුම් නා මූලධර්ම $\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$ වෙදීමෙන්

$O = (m + M)V_2 - mV_1 \Rightarrow V_2 = \frac{m}{m + M}V_1$

$= \frac{m}{m + M}\sqrt{3g\ell}$

$\overleftarrow{F} = m\underline{a} \downarrow$ නම්.

$(m + M)g - T = (m + M)\ddot{x}$ ——— ③

$T = \frac{2Mgx}{\ell}$ ——— ④

$(m + M)g - \frac{2Mgx}{\ell} = (m + M)\ddot{x}$

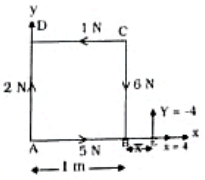
$\therefore \frac{2Mg}{\ell}\left[x - \frac{(m + M)\ell}{2M}\right] = (m + M)\ddot{x}$

$\ddot{x} = \frac{-2Mg}{\ell(m + M)}\left[x - \frac{(m + M)\ell}{2M}\right]$

මෙය ස. අ. ව. ලාක්ෂණික සමීකරණයකි.
සංඛ්‍යාතය යනු තත්පරයකට ඇති සවන දෝලන සංඛ්‍යාව නම් එහි අගය $\frac{1}{T}$ වේ.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ බැවින් සංඛ්‍යාතය $= \frac{\omega}{2\pi}$ වේ

ඇ. (a)



බල විභේදනයෙන්

$\overrightarrow{X} = 5 - 1 = 4$ N

$\uparrow Y = 2 - 6 = -4$ N

සම්පුයුක්ත බලය R නම්

$R = \sqrt{16 + 16} = \underline{2\sqrt{4}\ N}$

R, x අක්ෂය සමග θ කෝණයක් සෑදී නම්

$\tan\theta = \frac{Y}{X} = -1$

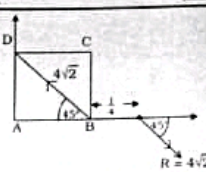
B වටා, බල්ටිනේ බලයන්ගේ ඝූර්ණය = සම්පුයුක්තයේ ඝූර්ණය බැවින්

$B(1 \times 1) - (2 \times 1) = -4 \times \overline{x}$

$\Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{4}$ m $\therefore E \equiv \left(\frac{5}{4}, 0\right)$

සම්පුයුක්ත බලයේ ඝිලා රේඛාවේ සමීකරණය

$y - 0 = -1\left(x - \frac{5}{4}\right) \Rightarrow 4y = -x + 5$



BD සමාන්තර ඉ බලය සමග බල්ටිනේ විශේෂතය සඳහ විට

$\overrightarrow{X} = 0$. $Y\uparrow = 0 \Rightarrow R = 0$

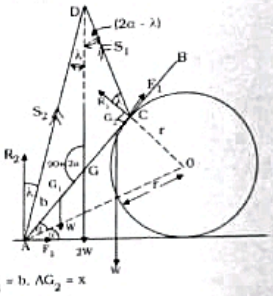
$\therefore$ බල්ටිනේ පුත්‍යාකාර දූතාකය වේ.

පුත්‍යාකාර ඝූර්ණය ABCD අතට

$= 4\sqrt{2} \times \frac{1}{4}\sin 45 = 4\sqrt{2}\,\frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 1$ Nm

(b)



$AG_1 = b$, $AG_2 = x$

$AC = r\cot\lambda$

$\therefore AG = b + \frac{x - b}{2}$

$= \frac{b + x}{2}$

ඉහතින සවරිය ඇදෙන්න බිමතාවේ සමතුලිතතාවයේ ඇති බැවින්. A සහ C වලින් වලදී ගුරු ප්‍රතිඵලය වන S_2 සහ S_1 බිඳිවෙලින් R_2 සහ R_1 අභිලම්බ ප්‍රතිඵලය සමග සෑදුන කෝණය සර්වසම කෝණ λ ට සමාන වේ.

ADC Δ යට අනුව ප්‍රකාශය ගෙදීමෙන්.

$AC\cot(90 + 2\alpha)$
$= GC\cot(2\alpha - \lambda) - AG\cot\lambda$

$r\cot\alpha(-\tan 2\alpha)$
$= \left[r\cot\alpha - \frac{(b + x)}{2}\right]\cot(2\alpha - \lambda)$
$- \frac{(b + x)}{2}\cot\lambda$

$-r\cot\alpha\tan 2\alpha$
$= r\cot\alpha\cot(2\alpha - \lambda) - \frac{(b + x)}{2}$
$\cot(2\alpha - \lambda) - \frac{(b + x)}{2}\cot\lambda$

$\left(\frac{b+x}{2}\right)$ [cot (2α - λ) + cot λ]

= r [cot α cot (2α - λ) + cot α tan 2α]

$\frac{(b+x)}{2}\left[\frac{\cos(2\alpha-\lambda)}{\sin(2\alpha-\lambda)} \times \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right]$

$= r\cot\alpha\left[\frac{\cos(2\alpha-\lambda)}{\sin(2\alpha-\lambda)} \times \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right]$

$\frac{(b+x)}{2}\left[\frac{\sin\lambda\cos(2\alpha-\lambda)+\cos\lambda\sin(2\alpha-\lambda)}{\sin(2\alpha-\lambda)\sin\lambda}\right]$

$= r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left[\frac{\cos(2\alpha-\lambda)\cos 2\alpha+\sin(2\alpha-\lambda)\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha-\lambda)\cos 2\alpha}\right]$

$\frac{(b+x)}{2}\frac{\sin(\lambda+2\alpha-\lambda)}{\sin(2\alpha-\lambda)}\sin\lambda = r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{\cos(2\alpha-\lambda-2\alpha)}{\sin(2\alpha-\lambda)\cos 2\alpha}$

$\frac{(b+x)}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\sin\lambda} = r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos(-\lambda)}{\cos 2\alpha}$

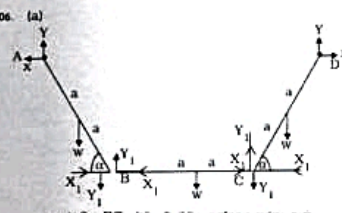
(b + x) sin α cos α. sin α cos 2α

= r cos α sin λ cos λ

(b + x) $\sin^2\alpha\cos 2\alpha$

= r sin λ cos λ

06. (a)



සැරසිය BC අවිතතව පිටය උත්තරය හරහා ඇත
නිසන් ඒවායේ දිය සමමිතික වේ

සැරසියට $\uparrow$ විභාජනයෙන් 2Y = 3W

$\Rightarrow Y = \frac{3W}{2}$

BA දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්.

(W × a cos α) + (X × 2 a sin α) - (Y × 2 a cos α) = 0

W cos α + 2 X sin α - $\frac{3W}{2}$ × 2 cos α = 0

2X sin α = 2 W cos α

X = W cot α

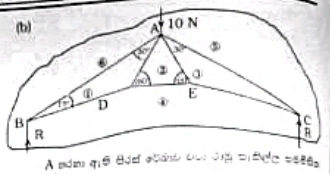
A හි ඉතිරියාව නිවන සමය β කෝණයක් සෑදී.

එවිට $\tan\beta = \frac{Y}{X} = \frac{\frac{3W}{2}}{W\cot\alpha}$

$= \frac{3}{2}\tan\alpha$

$\therefore \tan\alpha = \frac{2}{3}\tan\beta$

(b)



A සඳහා ඇති මියන් ත්‍රිකෝණ වලට ජ්‍යාවල ගැනීමෙන් සමමිතිය අනුසිට

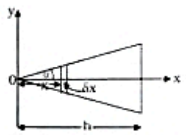
$\therefore$ 2R = 10

R = 5 N



දණ්ඩ	ප්‍රතාමාවය	විකලනය
CE සහ BD	ආතතිය	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cosec 15° N
AC සහ AB	තෙරපුම්	5 cot 15° N
AE සහ AD	ආතතිය	5 N
DE	ආතතිය	$\frac{5\ \text{cosec}\ 15}{\sqrt{2}}$ N

07.



සමමිතිකතාවයෙන් සෘජු රේඛා මත ඇති ඒකක දිග්ඝනයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඒ ඒ ඝනයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. එය G නම් $G = (\bar{x}, 0)$ වේ. y අක්ෂයේ සිට x දුරින් පිහිටි ඝනකම δx වන ඒකක තැටියක් සලකමු.

එහි අරය = x tan α

එහි පරිමාව = π [x tan α]^2 δx

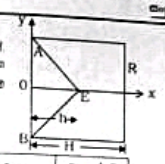
ඝෂ්ඨයේ සනත්වය ρ නම්

$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha dx\rho \times x}{\int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha\, dx\,\rho}$

$\bar{x} = \frac{\pi\rho\tan^2\alpha\int_0^h x^3\,dx}{\pi\rho\tan^2\alpha\int_0^h x^2\,dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{h^3}{3}\right]_0^h} = \frac{1}{4}h$

$\therefore$ ඉහළින් සිට ඇති ඒ. පු. ස. දුර $= \frac{3}{4}h$

සමමිතිකතාවයෙන් ඒ ඒ ඝනයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G^1 නම් $G = (\bar{x}, 0)$ වේ.



ඒකකය	පරිමාව	ඒ. පෙ. ම y අක්ෂයේ සිට දුර
සිලින්ඩරය	$\pi R^2 H\rho$	$\frac{H}{2}$
කේතුව	$\frac{1}{3}\pi R^2 h\rho$	$\frac{h}{4}$
සමස්ත වස්තුව	$\pi R^2\rho\ (H - \frac{h}{3})$	$\bar{x}$

y අක්ෂය වටා ත්‍රිමාණ ඇතිකෙරීමේදී

$\pi R^2 H\rho \cdot \frac{H}{2} - \frac{1}{3}\pi R^2 h\rho \cdot \frac{h}{4} = \pi R^2\rho\ (H - \frac{h}{3})\bar{x}$

$\frac{H^2}{2} - \frac{h^2}{12} = \frac{(3H - h)}{3}\bar{x}$

$\frac{(6H^2 - h^2)}{12} \times \frac{3}{(3H - h)} = \bar{x}$

$\bar{x} = \frac{6H^2 - h^2}{4\ (3H - h)}$

ඝන වස්තුව ඇ ගේ E වේ නම් $E = G_1$ වේ.

$\therefore \bar{x} = h \Rightarrow \frac{6H^2 - h^2}{4\ (3H - h)} = h$

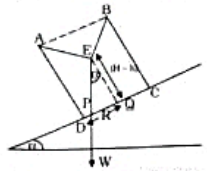
$\Rightarrow h^2 - 4\ Hh + 2H^2 = 0$

$h = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2 - 8H^2}}{2}$

$= \frac{4H \pm 2\sqrt{2}H}{2}$

$h = 2H \pm \sqrt{2}H$ $\quad h < H$ බැවින්

$h = 2H - \sqrt{2}H = (2 - \sqrt{2})H$ වේ



එවිට වස්තුව සොයෙරේඛීය නම් PQ < DQ විය යුතුයි.

$(H - h)\tan\alpha < R$

$H - h < R\cot\alpha$

$H - (2H - \sqrt{2}H) < R\cot\alpha$

$\sqrt{2}H - H < R\cot\alpha$

$H(\sqrt{2} - 1) < R\cot\alpha$ විය යුතුයි.

08. (a) A: සමමිතියේ ඇඳුම සෙවීම සඳහා සංඛ්‍යාවය ඇදිය යුතු විය.

B: දෙවෙනි අත්හරිනය තව ගැනීම

$p(A) = p_1$,

$p(B/A) = p_2$ හා $p(B/A^1) = 0$ බව දී

ඇත.

සමමිතියේ ඇඳුම සෙවීම යන අරමුණෙන් ඇති බව අත්හරිනය තව ගැනීම සමානවේ.

$= p(A)\ p(B/A) + p(A^1)\ P(B/A^1)$

$= p_1p_2 + (1 - p_1)\ 0$

$= p_1p_2$

$\therefore$ සොයාගත් අරමුණෙන් දෙවෙනි අත්හරිනය තව නොගැනීමේ සමානවේ $= 1 - p_1p_2$

I අරමුණෙන් අරමුණෙන් දෙවෙනි අත්හරිනය නොගැනීමේ සමානවේ

$= (1 - p_1p_2)^3$

II අරමුණෙන් දෙවෙනි අත්හරිනය තව ගැනීමේ සමානවේ (එවිට එකක දෙවෙනි අත්හරිනය නොවේ)

$= 3(p_1p_2)^2\ (1 - p_1p_2)$

III අදු වශයෙන් අරමුණෙන් දෙවෙනි අත්හරිනය තව ගැනීමේ සමානවේ

= 1 - (අරමුණෙන් කුමන දෙවෙනි අත්හරිනය තව නොගැනීමේ + එක් අරමුණෙන් දෙවෙනි අත්හරිනය තව නොගැනීමේ)

= $1 - (1 - p_1p_2)^3 - 3p_1p_2(1 - p_1p_2)^2$

හෝ

අරමුණෙන් දෙවෙනි දෙවෙනි නොගැනීමේ හා අරමුණෙන් කුමන දෙවෙනි නොගැනීමේ සමානවේ ඒකකය

$= 3\ (p_1p_2)^2\ (1 - p_1p_2) + (p_1p_2)^3$

(b) X නිවාඩු වලය පුරෝකථනය කිරීමේ සම්භාවිතාව $= \alpha$

Y නිවාඩු වලය පුරෝකථනය කිරීමේ සම්භාවිතාව $= \beta$

A: දෙන ලද දිනයක් සඳහා X ගේ පුරෝකථනය නිවැරදි වීම

B: දෙන ලද දිනයක් සඳහා Y ගේ පුරෝකථනය නිවැරදි වීම

C: දෙන ලද දිනයක සාදෘශ්‍යය යහපතිව පැවතීම.

C = $(A \cap B^1) \cup (A^1 \cap B)$. A, A^1, B, B^1 සියලක් නිදහස් වේ.

P(C) = $P[(A \cap B^1) \cup (A^1 \cap B)]$

= $P(A \cap B^1) + P(A^1 \cap B)$

= $P(A).\ P(B^1) + P(A^1)\ P(B)$

= $\alpha(1 - \beta) + (1 - \alpha)\beta$

X ගේ අනාවැකිය නිවැරදි වීම සඳහා Y අනාවැකිය වැරදි වීය යුතුය.

$\therefore$ X ගේ අනාවැකිය නිවැරදි වීමේ සම්භාවිතාව

$= \alpha(1 - \beta)$

P (X ගේ අනාවැකිය නිවැරදි වීම / C)

$= \frac{\alpha(1 - \beta)}{\alpha(1 - \beta) + (1 - \alpha)\beta}$

(08) (a)

පන්ති අන්තරය x	සංඛ්‍යාත f	fx	Cf
6000	35	210000	35
10000	30	300000	65
15000	25	375000	90
20000	10	200000	100

මධ්‍යන්‍යය $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

$= \frac{1085000}{100}$

$= 10850/-$

මධ්‍යස්ථය = 100න් බෙදීම සැලකීමේ දී අගයන්ගේ මධ්‍යම ස්ථාන 50 සහ 51 වැන්නෝගේ වැටුප්වල සාමාන්‍යයයි.

මධ්‍යස්ථය $= \frac{10000 + 10000}{2}$

$= 10000/-$

මාතය = මාතය පහසුවෙන් සොයාගත හැකි අන්දම වැටුප 6000/- බවයි.

4 අඳෝනාව අවධානය යොමුවේ එහි එක එක අගයන් වැටුප 3750/- බැගින් වැඩිවීම.

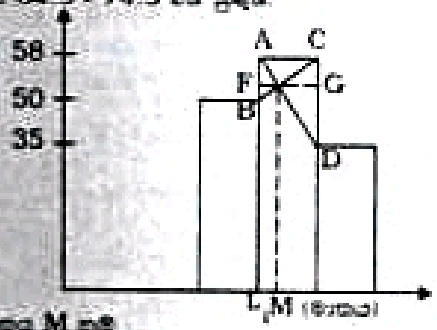
මධ්‍යන්‍යය පහසුවෙන් ගණනය වෙයි.

$\because \Sigma fx$ සඳහා දැක්වූ අගයට 3750 × 4 ක් එක් වන බැවිනි.

මධ්‍යස්ථය වැටෙන්නේ 2 වන වැටුප් කාණ්ඩය තුළය. වැටුප් වැඩිවීම නිසා සමූහගතයේ 4 ක් මුල් වැටුප් සලකා බලා දැන් මධ්‍යස්ථ අගයන් ලබාගන්නා 50 සහ 51 වැනි දත්ත ගොනුවෙහිම රැඳේ.

මාතය වැටෙන්නේ සඳහන් වැටුප් කාණ්ඩයේ ය. වැටුප් වැඩිවීම නිසා 4 ක් මිලය වැටුප් සලකා බලද්දී සංඛ්‍යාතය 31 වශයෙන් රැඳේ.

(b) මෙහි සන්ධිය 65 - 74 වුවද, සඳහා සන්ධි ඒවා වෙනුවෙන් ගන්නේ 64.5 - 74.5 ය.



මාතය M යැයි

විසඳුම

$\frac{M - 64.5}{74.5 - M} = \frac{58 - 50}{58 - 35} = \frac{8}{23}$

$23M - 23 \times 64.5 = 8 \times 74.5 - 8M$

$31M = (23 \times 64.5) + (8 \times 74.5)$

$M = 67.08$

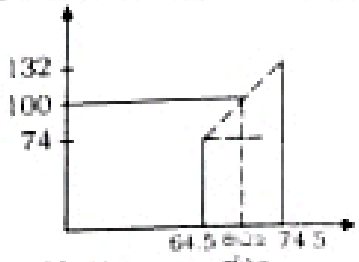
වෙනත් ක්‍රමය

$M = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_2} C$

$M = 64.5 + \frac{(58 - 50)}{(58 - 50) + (58 - 35)} \times 10$

$= 64.5 + \frac{8 \times 10}{(8 \times 23)} = 67.08$

මධ්‍යස්ථය සෙවීම ද 64.5 - 74.5 අතර



මධ්‍යස්ථය M බව

විසඳුම

$\frac{M - 64.5}{74.5 - 64.5} = \frac{100 - 74}{132 - 74} = \frac{26}{58} = \frac{13}{29}$

$29M - (29 \times 64.5) = 13 \times 10$

$29M = 130 + 29 \times 64.5$

$M = 68.98$

වෙනත් ක්‍රමය

$M = L_1 + \frac{\left[\frac{n}{2} - F_1\right]}{fm} C$

$= 64.5 + \frac{(100 - 74)}{58} \times 10$

$= 68.98$

පන්ති පරාසය	සංඛ්‍යාත -තය	මධ්‍ය අගය	අගය- මිනය d	u	fu	fu^2
45 - 54	24	49.5	-20	-2	-48	96
55 - 64	50	59.5	-10	-1	-50	50
65 - 74	58	69.5	0	0	0	0
75 - 84	35	79.5	10	1	35	35
85 - 94	21	89.5	20	2	42	84
95 - 104	12	99.5	30	3	36	108
	$\Sigma f = 200$				$\Sigma fu = 15$	$\Sigma fu^2 = 373$

මධ්‍යන්‍යය = උපකල්පිත මධ්‍යන්‍යය + $C \frac{\Sigma fu}{\Sigma f}$

$= 69.5 + \frac{10 \times 15}{200}$

$= 69.5 + 0.75 = 70.25$

විචලනය $= C^2 \left[\frac{\Sigma f_1 u_1^2}{\Sigma f_1} - \left(\frac{\Sigma f_1 u_1}{\Sigma f}\right)^2\right]$

$= 100 \left[\frac{373}{200} - \left[\frac{15}{200}\right]^2\right]$

$= 100 [1.865 - 0.005625]$

$= 185.9375$

∴ සම්මත අපගමනය = 13.6

*** ***

Past Papers Wiki - Most Extensive Wikipedia of Past Papers!