01\. (a) $f(x) = x^2 + bx + c$ හා $g(x) = x^2 + qx + r$ ලෙස ගනිමු

α, β යනු $g(x) = 0$ හි මූලයන් නම්

$\alpha + \beta = -q$ ——— ①

$\alpha\beta = r$ ——— ②

$$\begin{aligned} f(\alpha)\,.\,f(\beta) &= (\alpha^2 + b\alpha + c)\,(\beta^2 + b\beta + c) \\ &= \alpha^2\beta^2 + b\,\alpha^2\beta + c\,\alpha^2 + b\,\alpha\beta^2 \\ &\quad + b^2\,\alpha\beta + bc\alpha + c\beta^2 \\ &\quad + bc\beta + c^2 \\ &= (\alpha\beta)^2 + b\,\alpha\beta\,(\alpha + \beta) \\ &\quad + c\,[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] \\ &\quad + bc\,(\alpha + \beta) + b^2\alpha\beta + c^2 \\ &= r^2 - brq + c\,(q^2 - 2r) \\ &\quad - bcq + b^2r + c^2 \\ &= c^2 - 2\,cr + r^2 - brq + cq^2 \\ &\quad - bcq + b^2r \\ &= (c - r)^2 - br\,(q - b) + cq\,(q - b) \\ &= (c - r)^2 - (q - b)\,(br - cq) \\ &= \underline{\underline{(c - r)^2 - (b - q)\,(cq - br)}} \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ ට පොදු මූලයක් ඇති නම්

$f(\alpha) = 0$ හෝ $f(\beta) = 0$ ට හෝ වේ.

එවිට $f(\alpha)\ f(\beta) = 0$ වේ

එනම් $(c - r)^2 - (b - q)\,(cq - br) = 0$

$\Longrightarrow (c - r)^2 = (b - q)\,(cq - br)$

එබැවින් $(b - q)$, $(c - r)$ සහ $(cq - br)$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක වේ.

α, δ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම්

$\alpha + \delta = -b$ ——— ③ හා $\alpha\delta = c$ ——— ④

② හා ④ න් $\alpha\,(\beta + \delta) = r + c$ ——— ⑤

$\alpha^2\,\beta\delta = cr$ ——— ⑥

α යනු $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ හි මූලයක් නිසා

$\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ හා $\alpha^2 + q\alpha + r = 0$

එබැවින් $(q - b)\,\alpha = c - r$

දැන් $b \neq q$ හා $c \neq r$ විට $\alpha = \dfrac{c - r}{q - b}$

දැන් ⑤ න් $\beta + \delta = \dfrac{(c + r)\,(q - b)}{c - r}$ හා

⑥ න් $\beta\delta = \dfrac{cr\,(q - r)^2}{(c - r)^2}$

$\therefore$ β, δ මූලයන් සමීකරණය

$$x^2 - \frac{(c + r)\,(q - b)}{(c - r)}\,x + \frac{cr\,(q - b)^2}{(c - r)^2} = 0$$

(b) $p(x)$, බහු පදය $(x - \alpha)$ මගින් බෙදූ විට ලබ්ධිය $Q(x)$ හා ශේෂය R නම්

$p(x) = (x - \alpha)\,Q\,(x) + R$ වේ

එවිට $p(\alpha) = R$

$p(-1) = -a - b + c = 4 \Rightarrow a + b - c = -4$ ——— ①

$p(1) = a + b + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ ——— ②

$p(2) = 8a + 2b + c = 4$ ——— ③

① හා ② න් $a + b = -2$ ——— ④ හා $c = 2$

$c = 2$, ③ හි ආදේශයෙන්

$8a + 2b = 2$

$\Rightarrow 4a + b = 1$ ——— ⑤

⑤ - ④ $3a = 3 \Rightarrow a = 1$

එවිට ④ න් $b = -3$

එවිට $p(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)\,(x^2 + x - 2)$

$= (x - 1)^2\,(x + 2)$

$p(x)$ හි රේඛීය සාධක වන්නේ $(x - 1)$ හා $(x + 2)$ වේ.

02\. B - 7 G - 5

(i) 12 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමකින් සිසුන් 5 දෙනෙකු තෝරාගත හැකි මාර්ග ගණන

$$= {}^{12}C_5 = \frac{12\,!}{7\,!\,5\,!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 72 \times 11 = \underline{792}$$

(ii) කිසිදු සීමාවකින් තොරව තෝරාගත හැකි විධි $\Big\} = 792$

පිරිමි ළමයින් 5 දෙනාම තෝරාගත හැකි විධි $\Big\} = {}^7C_5 = \dfrac{7\,!}{2\,!\,5\,!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5\,!}{2 \times 5\,!} = 21$

පටන් එක් ගැහැණු ළමයෙක්වත් ඇතුළත් වන සේ තෝරාගත හැකි විධි ගණන $\Bigg\} = 792 - 21 = \underline{771}$

(iii) විකල්ප තේරීම්

B	G
4	1
3	2
2	3
1	4

පටන් පිරිමින් එක් ගැහැණු ළමයෙක් හා එක් පිරිමි ළමයෙක් ඇතුළත් වන සේ තෝරාගත හැකි තේරීම් ගණන

$$= {}^7C_4 \times {}^5C_1 + {}^7C_3 \times {}^5C_2 + {}^7C_2 \times {}^5C_3 + {}^7C_1 \times {}^5C_4$$

$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} \times 5 + \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} \times \frac{5 \times 4}{2}$

$+ \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} + 7 \times 5$

$= 175 + 350 + 210 + 35 \quad = \underline{770}$

සටහන

ප්‍රශ්නය (i) කොටසේ ... විට ගැහැණු ළමයි ... } $= 1$

... ළමයි ... $= {}^{7}c_{5}$

$= 21$

∴ ... } $= 792 - (1 + 21)$

$= \underline{770}$

(b) $(1 + 2x + kx^2)^5$

$= (1 + x(2 + kx))^5$

$= 1 + {}^5c_1\, x(2 + kx) + {}^5c_2\, x^2(2 + kx)^2$

$+ {}^5c_3\, x^3(2 + kx)^3 + {}^5c_4\, x^4(2 + kx)^4$

$+ x^5(2 + kx)^5$

x^3 හි සංගුණකය

$= 4k\,{}^5c_2 + 8 \times {}^5c_3$

$= 4k \times \frac{5 \times 4}{2} + 8 \times \frac{5 \times 4}{2}$

$= 40k + 80$

$= \underline{40(k + 2)}$

x^3 හි සංගුණකය ශුන්‍ය වේනම්

$40(k + 2) = 0 \quad \Rightarrow \underline{k = -2}$

$(1 + 2x - 2x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$

$x = 1$ විට

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ ——— ①

$x = -1$ විට

$-243 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{10}$ ——— ②

$\frac{① + ②}{2} \Rightarrow \quad a_0 + a_2 + \dots a_{10} = \underline{-121}$

$\frac{① - ②}{2} \Rightarrow \quad a_1 + a_3 + \dots a_9 = \underline{122}$

03. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ ——— ①

$n = 1$ විට $\quad L{\cdot}H{\cdot}S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

$R{\cdot}H{\cdot}S = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

∴ $n = 1$ විට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.

$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු. මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

එවිට $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)}$ වේ

දැන් $\frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$ දෙපසටම එකතු කරමු

එවිට

$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{p(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)} + \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} + \frac{1}{2(p+3)}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+2)} + \frac{1}{2(p+3)}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(\overline{p+1}+1)} + \frac{1}{2(\overline{p+1}+2)}$

∴ $n = p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = (p+1)$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = 1$ විට සත්‍ය බැවින්

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$\frac{1}{4} - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} < \frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right] < \frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} < \frac{1}{50}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{50}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{50}$

$\Leftrightarrow \quad 50 < (n+1)(n+2) \qquad \because n > 0$

$f(n) = (n+1)(n+2)$ යනු n හි ආරෝහණ ශ්‍රිතයකි.

$f(5) = 6 \times 7 \quad = 42$

$\Rightarrow n = 5$ විට $(n+1)(n+2) < 50$

$f(6) = 7 \times 8 \quad = 56$

$n = 6$ විට $(n+1)(n+2) > 50$

∴ අසමානතාවය සපුරාලන n හි කුඩාම අගය 6 වේ.

(b) $\frac{1}{2}|x - 1| = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}(x-1) & x < 1 \end{cases}$

හා $|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & x \geq 4 \\ -(x-4) & x < 4 \end{cases}$

$\underline{x < 1}$ විට $\quad -\frac{1}{2}(x-1) > -(x-4) \Leftrightarrow x > 7$

මෙය විය නොහැක

$\underline{1 \leq x < 4}$ විට $\frac{1}{2}(x-1) > -(x-4) \Leftrightarrow x > 3$

$\Leftrightarrow 3 < x < 4$

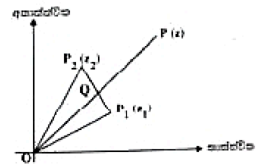
$\underline{4 \leq x}$ විට $\quad \frac{1}{2}(x-1) > (x-4) \Leftrightarrow x < 7$

∴ $4 \leq x < 7$ විට අසමානතාව වලංගු වේ.

∴ අසමානතාව සපුරාලන x හි අගය කුලකය

$\{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 < x < 7\}$

04.



O මූල ලක්ෂ්‍යය යයි ද,

P_1 හා P_2 හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින්

$z_1 \quad = x_1 + iy_1$ හා

$z_2 \quad = x_2 + iy_2$ යයි ගනිමු.

එවිට $P_1 \quad = (x_1, y_1)$ හා

$P_2 \quad = (x_2, y_2)$ වේ.

P_1P_2 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ලෙස ගෙන $OQ = QP$ වනසේ OQ, P දක්වා දික්කරන්න. එවිට P මගින් $z_1 + z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දක්වේ.

සාධනය - ඛණ්ඩාංක ජ්‍යාමිතිය

$Q \quad = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$OQ = QP$ නිසා $\qquad p = (x, y)$ නම්

$\frac{x+0}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ හා $\frac{y+0}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$

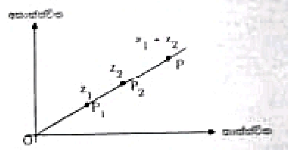
$\Rightarrow x = x_1 + x_2, \; y = y_1 + y_2$

$\Rightarrow P = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

∴ P හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$

$= \underline{z_1 + z_2}$



මෙහිදී

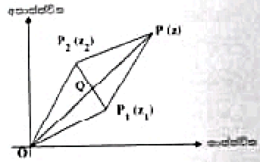
$OP \quad = OP_1 + P_1P$ හා

$OP_2 = P_1P$ ලෙස ගත හැක

එවිට $OP \quad = OP_1 + OP_2$

$z_1 = 0$ හෝ $z_2 = 0$ විට ද මෙසේම වේ.

$OP_1 = |z_1|$ හා $OP_2 = |z_2|$ හා $OP = |z_1 + z_2|$ වේ.



∴ $\quad$ O P_1P ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට

$OP < OP_1 + P_1P$

OP_1PP_2 සමාන්තරාස්‍රයක් වන බැවින්

$P_1P = OP_2 \Rightarrow OP < OP_1 + OP_2$

$\Rightarrow |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$

∴ $\quad$ O, P_1, P_2 ඒක රේඛීය හා O, P_1 හා P_2 අතර පිහිටි විට ද සමාන ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.

∴ $\quad$ සාධාරණ වශයෙන් $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ වේ.

$z_1 \quad = -12 + 5i, \Rightarrow |z_1| = 13, \; |z_2| = 5$ බව දී ඇත.

දැන් $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$\quad \llcorner$ Arg (z_1) = Arg (z_2) විට

$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq 18$

$\quad$ └ $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$ විට

$\therefore |z_1 + z_2|$ හි විශාලතම අගය $= 18$ වේ.

$\frac{\pi}{2} < \text{Arg}\, z_1 < \pi$

$|z_1 + z_2|$ විශාලතම අගය ගන්නා විට සහ

$\frac{\pi}{2} < z_2 < \pi$ විට

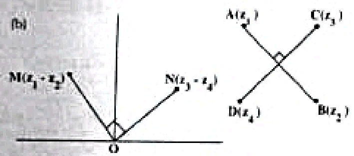
$\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(z_1)$ නිසාත්

$\therefore z_2 = \lambda z_1,\ \lambda \in \mathbb{R}^+$ ආකාර වේ.

එවිට $\frac{|z_2|}{|z_1|} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{13} = \lambda$

$\therefore z_2 = \frac{5}{13}(-12 + 5i) \quad = \underline{\underline{\frac{-60}{13} + \frac{25}{13} i}}$

(b)



BA//OM $\qquad$ DC // ON සහ

BA = OM හෙයින් DC = ON වනසේ ද

M සහ N ලකුණු කළ විට

M මඟින් $z_1 - z_2$ සහ N මඟින් $z_3 - z_4$ නිරූපණය කෙරේ

නිරූපනය වේ. එවිට $OM \perp ON$

එනම් $|\text{Arg}(z_1 - z_2) - \text{Arg}(z_3 - z_4)| = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = \text{Arg}(z_1 - z_2) - \text{Arg}(z_3 - z_4)$$

නිසාත් $\left|\text{Arg}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ ශුද්ධ අතාත්ත්වික වේ

05. (a) $\quad y = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} x\right]^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\left[\sin^{-1} x\right] \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 - x^2}\ \frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x \text{ ——— } ①$$

x විෂයෙන් ① දෙපසම නැවත අවකලනයෙන්

$$\sqrt{1 - x^2}\ \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\underline{\underline{(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0}} \text{ ——— } ②$$

x විෂයෙන් ② අවකලනයෙන්

$$(1 - x^2)\frac{d^3y}{dx^3} + (-2x)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1 - x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ——— } ③$$

x විෂයෙන් ③ අවකලනයෙන්

$$(1 - x^2)\frac{d^4y}{dx^4} + (-2x)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$(1 - x^2)\frac{d^4y}{dx^4} - 5x\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ ——— } ④$$

$x = 0$ විට $\quad$ ① න් $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} \qquad = 0$

$x = 0$ විට $\quad$ ② න් $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} - 1 \qquad = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 1$$

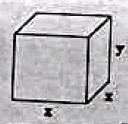
$x = 0$ විට $\quad$ ③ න් $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} - 0 - 0 \qquad = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = 0$$

$x = 0$ විට $\quad$ ④ න් $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0} - 0 - 4 \times 1 \qquad = 0$

$$\underline{\underline{\Rightarrow \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0} = 4}}$$

(b)



පෙට්ටියේ පතුලේ පැත්තක දිග x cm යයිද එහි උස y cm යයි ද සිතමු.

ආධාරකයේ වර්ගඵලය $\qquad = x^2\ cm^2$

ආධාරකය සඳහා $1\ cm^2$ ක වියදම p යයි සිතමු.

එවිට පතුල සඳහා වියදම $\qquad = px^2$

අනෙක් පැති හතරේ වර්ගඵලය $\qquad = 4\,xy$

ඒ සඳහා වියදම $= 4xy \times 8\,p \quad = 32\,pxy$

එවිට මුළු වියදම c නම්

$$c = px^2 + 32\,p\,xy$$

නමුත් $x^2y = 256$ නිසා $y = \frac{256}{x^2}$

එවිට $c = px^2 + 32\,p\,\cancel{x}\ \frac{256}{\cancel{x^2}}$

$$c = px^2 + 32 \times 256\,p\ \frac{1}{x}$$

$$\frac{dc}{dx} = 2\,px + 32 \times 256\,p\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2p}{x^2}[x^3 - 32 \times 128] = \frac{2p}{x^2}[x^3 - 2^5 \times 2^7]$$

$$= \frac{2p}{x^2}[x^3 - 2^{12}]$$

අවමයක් ලැබෙන විට $\qquad \frac{dc}{dx} = 0$

$\Rightarrow x^3 = 2^{12} \quad \Rightarrow x = 2^4 \qquad = 16$

	$x < 16$	$x = 16$	$x > 16$
$\frac{dc}{dx}$	< 0	0	> 0

$\therefore x = 16$ විට පිරිවැය අවම වේ.

$\therefore$ ලාභදායී වන්නේ $x = 16$ විට $y = \frac{256}{16^2} = 1$

$\therefore$ වඩාත් ලාභදායී වන්නේ ආධාරකයේ පැත්තක් 16 cm වන අතර උස 1 cm වීම යුතුය.

06. $\qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\sin x}$

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2} \qquad \sin x = \frac{2\,t}{1 + t^2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{5 + 4\,\frac{2\,t}{1 + t^2}} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{5 + 5\,t^2 + 8t}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{5\,t^2 + 8\,t + 5} = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{8}{5}t + 1}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + 1 - \frac{16}{25}}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}}$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\left[\tan^{-1}\frac{\left(t + \frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}}\right]_0^1$$

$$\underline{\underline{= \frac{2}{3}\left(\tan^{-1} 3 - \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)}}$$

(b) $\quad I = \int_0^1 15\,x^3\sqrt{1 + x^2}\,dx$

$$= 5\int_0^1 x^2\,d\,(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 5\left\{\left[x^2(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\,d\,(x^2)\right\}$$

$$= 5\left\{\left[1 \times 2^{\frac{3}{2}} - 0\right] - \int_0^1 2x\,(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right\}$$

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \left[\frac{2}{5}(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1\right\}$$

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \left[\frac{2}{5}\left(2^{\frac{5}{2}} - 1\right)\right]\right\}$$

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \frac{1}{5} \times 8\sqrt{2} + \frac{2}{5}\right\}$$

$$= 10\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 2$$

$$= 2\sqrt{2} + 2 \qquad \underline{= 2(\sqrt{2} + 1)}$$

(c) $\quad \int \frac{x^2 - 10\,x + 13}{(x - 2)^2(x - 3)}\,dx$

$$\frac{x^2 - 10\,x + 13}{(x - 2)^2(x - 3)} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{(x - 3)}$$

$B = \frac{-3}{-1} = 3$

$C = \frac{-8}{1} = -8$

$x^2 - 10x + 13 = A(x-2)(x-3) + B(x-3) + C(x-2)^2$

x^2 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

$A + C = 1$

$A = 9$

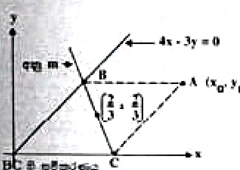
$$\int \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-2)^2(x-3)}$$

$$= \int \frac{9}{(x-2)}\,dx + \int \frac{3\,dx}{(x-2)^2} - \int \frac{8\,dx}{(x-3)}$$

$$= 9\ln|x-2| + \frac{3(x-2)^{-1}}{-1} - 8\ln|x-3|$$

$$= 9\ln|x-2| - 8\ln|x-3| - \frac{3}{(x-2)} + C$$

07. (i)



BC හි සමීකරණය

$y - \frac{2}{3} = m\left(x - \frac{2}{3}\right)$

$3y = 3mx - 2m + 2$ —— ①

$4x - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 4x$

$4x = 3mx - 2m + 2$

$x(4 - 3m) = 2(-m + 1)$

$x = \frac{2(m-1)}{(3m-4)}$

$y = \frac{4 \times 2}{3}\left[\frac{m-1}{3m-4}\right] = \frac{8}{3}\left[\frac{m-1}{3m-4}\right]$

$B = \left[\frac{2(m-1)}{(3m-4)}, \frac{8}{3}\left[\frac{m-1}{3m-4}\right]\right]$

$C = \left(\frac{2(m-1)}{3m}, 0\right)$

(ii) $OB^2 = \frac{4(m-1)^2}{(3m-4)^2} + \frac{64(m-1)^2}{9(3m-4)^2}$

[illegible] OB ලැබේ

$OB = \sqrt{\frac{100(m-1)^2}{9(3m-4)^2}} = \left|\frac{10(m-1)}{3(3m-4)}\right|$

$OC^2 = \frac{4(m-1)}{9m^2} \Rightarrow OC = \left|\frac{2(m-1)}{3m}\right|$

(iii) ABOC රොම්බසයක් නම්.

$OB = OC \Rightarrow \left|\frac{10(m-1)}{3(3m-4)}\right| = \left|\frac{2(m-1)}{3m}\right|$

$\frac{10\cancel{(m-1)}}{\cancel{3}(3m-4)} = \pm\frac{2\cancel{(m-1)}}{\cancel{3}m} \quad ; m \neq 1$

$10m = \pm 6m \mp 8$

$10m \mp 6m = \mp 8$

$4m = -8$ හෝ $16m = 8$

$m = -2$ හෝ $m = \frac{1}{2}$

$A \equiv (x_0, y_0)$ නම්

$m = -2$ විට $B \equiv \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ $\quad C \equiv (1, 0)$

$m = \frac{1}{2}$ විට $B \equiv \left(\frac{2}{5}, \frac{8}{15}\right)$ $\quad C \equiv \left(\frac{-2}{3}, 0\right)$

$m = -2$ විට $\frac{x_0}{2} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{8}{5}$

$\frac{y_0}{2} = \frac{\frac{4}{5} + 0}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{4}{5}$

එවිට $A \equiv \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$

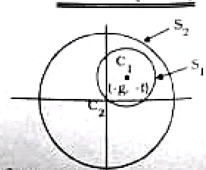
එසේම

$m = \frac{1}{2}$ විට $x_0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{15}$

$y_0 = \frac{8}{15}$

එවිට $A \equiv \left(\frac{-4}{15}, \frac{8}{15}\right)$

08.



$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

හි කේන්ද්‍රය C_1 හා අරය r_1 නම් ද

$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 4r^2 = 0$ හි

කේන්ද්‍රය C_2 හා අරය r_2 නම්

C_2, O මූලලක්ෂ්‍යය වේ.

$C_1 \equiv (-g, -f) \quad C_2 \equiv (0, 0) \quad r_1 = \sqrt{g^2 + f^2}$

$r_2 = 2|r|$

වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වේ නම්,

$r_1 + r_2 = C_1C_2 = \sqrt{g^2 + f^2}$

එනම් $\sqrt{g^2 + f^2} + 2|r| = \sqrt{g^2 + f^2}$

$\Rightarrow r = 0$

මෙය විසංගතයකි

∴ වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ නොවේ

වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේනම්,

$C_1C_2 = |r_2 - r_1|$

එනම් $\sqrt{g^2 + f^2} = \left|2|r| - \sqrt{g^2 + f^2}\right|$

$g^2 + f^2 = 4|r|^2 - 4|r|\sqrt{g^2 + f^2} + g^2 + f^2$

$|r| = \sqrt{g^2 + f^2}$

එනම් $r^2 = g^2 + f^2$ නම් අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ හි පොදු ස්පර්ශකය

$S_1 - S_2 = 0$ මගින් ලැබේ.

එනම් $gx + fy + 2r^2 = 0$ ①

කේන්ද්‍ර දෙක යා කරන රේඛාව

$y = \frac{f}{g}x \Rightarrow fx - gy = 0$ —— ②

මෙම රේඛා දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය

① හා ② න් $x = \frac{-2gr^2}{f^2 + g^2}$ හා $y = \frac{-2fr^2}{g^2 + f^2}$

∴ පොදු ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$\left(\frac{-2gr^2}{f^2 + g^2}, \frac{-2fr^2}{g^2 + f^2}\right)$

$= (-2g, -2f)$

$(\because g^2 + f^2 = r^2$ වන බැවින්$)$

[illegible] $0 < a < 1$ වන $(a, 0)$ [illegible] වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2gx + 2gy = 0$ [illegible]

මෙය $(a, 0)$ හරහා යන බැවින් $a^2 + 2ga = 0$

$a > 0$ බැවින් $a = -2g$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බැවින්

$r^2 = 1$ වන බැවින් $g^2 + f^2 = 1$

$\frac{a^2}{4} + f^2 = 1$

$\Rightarrow f^2 = 1 - \frac{a^2}{4} = \frac{4 - a^2}{4}$

$\Rightarrow 2f = \pm\sqrt{4 - a^2}$

∴ $(a, 0)$ හා [illegible] $x^2 + y^2 - 4 = 0$ [illegible]

[illegible] $\left(a, \sqrt{4 - a^2}\right)$ හා $(a, -\sqrt{4 - a^2})$ [illegible]

$$\left(\frac{y - \sqrt{4 - a^2}}{x - a}\right)\left(\frac{y + \sqrt{4 - a^2}}{x - a}\right) = -1$$

$\Rightarrow y^2 - 4 + a^2 = -x^2 + 2ax - a^2$

එනම් $x^2 + y^2 - 2ax + 2a^2 - 4 = 0$

09. (a)

(i) $\cos 4\theta - \cos 3\theta$

$= 2\cos^2 2\theta - 1 - (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= 2(\cos^2\theta - 1)^2 - 1 - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta$

$= 8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1$

(ii) $n \in \mathbb{Z}$ විට

$7\theta = 2n\pi$ නම් එවිට $4\theta = 2n\pi - 3\theta$

∴ $\cos 4\theta = \cos 3\theta$

එවිට $8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0$

මෙය $\cos\theta$ හි 4 වන [illegible] සමීකරණයකි.

[illegible] $\cos\theta = \cos\frac{2n\pi}{7}$,

$n = 0, 1, 2, 3$ වේ.

එනම් $\cos 0, \cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ වේ.

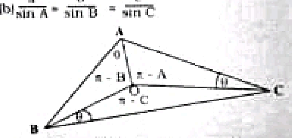
එවිට $\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

(b) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



AOB Δ න් $\frac{OB}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin(\pi - B)} = \frac{c}{\sin B}$

එනම් $OB = \frac{c\sin\theta}{\sin B}$

BOC Δ න් $\frac{OB}{\sin(C - \theta)} = \frac{a}{\sin(\pi - C)}$

එවිට $OB = \dfrac{a \sin (C - \theta)}{\sin C}$

එවිට $$\frac{a \sin (C - \theta)}{\sin C} = \frac{c \sin \theta}{\sin B}$$

$$\frac{a (\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta)}{\sin C} = \frac{c \sin \theta}{\sin B}$$

$$\frac{\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta}{\sin C \sin \theta} = \frac{c}{a \sin B}$$

$$\cot \theta - \cot C = \frac{c}{a \sin B} = \frac{c}{b \sin A}$$

$$= \frac{\sin C}{\sin B \sin A}$$

$$= \frac{\sin (\pi - \overline{A + B})}{\sin B \sin A} = \frac{\sin (A + B)}{\sin B \sin A}$$

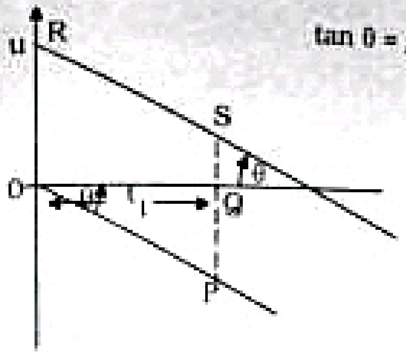
$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin B \sin A}$$

$$= \cot B + \cot A$$

$\therefore$ <u>$\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$</u>

*** ***

01. (a)



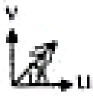
$\tan\theta = g$

ඇංශු දෙක පොළොවෙහි සිට එකම උසකින් ඇත්නම් A අංශුව සිරස්ව පහළට චලනය වූ දුරක් (OPQ Δ) හා B අංශුව සිරස්ව ඉහළට චලනය වූ දුරක් (ORSQ) එකතුව h ට සමාන විය යුතුය. එක වූ කාලය $t = t_1$ (OQ) යයි ගනිමු

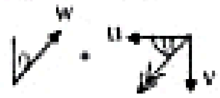
$$ORSQ + OPQ\,\Delta = ORSP$$

$$ORSP = OR \times OQ$$

$$\therefore h = u \times t_1 \Rightarrow \underline{\underline{t_1 = \frac{h}{u}}}$$

(b) (ගැ, ජ) =  , (බෝ, ජ) = w

(බෝ, ගැ) = (බෝ, ජ) + (ජ, ගැ)

= 

= 

(බෝ, ගැ) = → $(w\sin\theta - u)$ + ↑ $(w\cos\theta - v)$

බෝට්ටුවට කෙළින්ම හරහා යාමට නම් එහි සාපේක්ෂ ප්‍රවේගය ↑ විය යුතුය. එම නිසා → ප්‍රවේගය, $w\sin\theta - u = 0$ විය යුතුය. එනම්

$$\sin\theta = \frac{u}{w}\ ;\ \theta < \frac{\pi}{2} \text{ නිසා}$$

$$\sin\theta < 1 \Rightarrow \frac{u}{w} < 1 \Rightarrow u < w$$

ගැඹුරට ගතවන කාලය $= \dfrac{d}{w\cos\theta - v}$

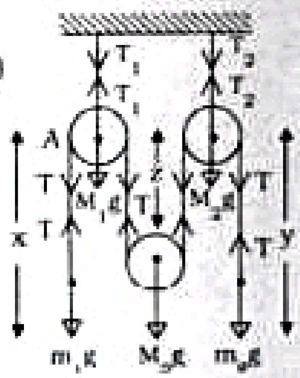
$$= \frac{d}{w\sqrt{1-\sin^2\theta} - v} = \frac{d}{\sqrt{w^2 - u^2} - v}$$

02. $x + y + 2z$ = නියතයකි
කාලය t විෂයෙන් අවකලනයෙන්

$\ddot{x} + \ddot{y} + 2\ddot{z} = 0$ වේ.

$\downarrow f_1 = \ddot{x}$ ද, $\downarrow f_2 = \ddot{y}$ ද

එවිට කප්පිය $\ddot{z} = \uparrow \dfrac{(f_1 + f_2)}{2}$



(a) (m_1 ට E) $= \downarrow f_1$

(m_2 ට E) $= \downarrow f_2$

(M_3 ට E) $= \uparrow \dfrac{f_1 + f_2}{2}$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$\downarrow m_1 g - T = m_1 f_1 \quad \text{①}$$

$$\downarrow m_2 g - T = m_2 f_2 \quad \text{②}$$

$$\uparrow 2T - M_3 g = M_3 \frac{(f_1 + f_2)}{2} \quad \text{③}$$

① න් $f_1 = g - \dfrac{T}{m_1}$

② න් $f_2 = g - \dfrac{T}{m_2}$

③ හි ආදේශයෙන්

$$2T - M_3 g = \frac{M_3}{2}\left[g - \frac{T}{m_1} + g - \frac{T}{m_2}\right]$$

$$\frac{4T}{M_3} - 2g = 2g - \frac{T}{m_1} - \frac{T}{m_2} \quad \left(\div \frac{M_3}{2} \text{ න්}\right)$$

$$T\left[\frac{4}{m_3} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right] = 4g$$

$$T\left[\frac{4m_1 m_2 + M_3(m_1 + m_2)}{M_3 m_1 m_2}\right] = 4g$$

$$T = \frac{4\, m_1 m_2 M_3 g}{4m_1 m_2 + M_3(m_1 + m_2)}$$

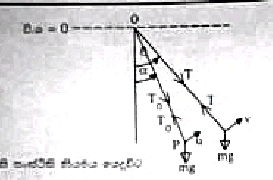
$$T_1 = 2T + M_1 g\ ;\ T_2 = 2T + M_2 g$$

<u>අචලිත සිවිලිම මත ඇතිකරන බලය</u>

$$T_1 + T_2 = 4T + g(M_1 + M_2)$$

$$= \frac{16\, m_1 m_2 M_3 g}{4m_1 m_2 + M_3(m_1 + m_2)} + g(M_1 + M_2)$$

(b)



ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමට

$\frac{1}{2}mu^2 - mga\cos\alpha$

$= \frac{1}{2}mv^2 - mga\cos\theta$ —— ①

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{a}$ —— ②

① න් $v^2 = u^2 - 2ga\cos\alpha + 2ga\cos\theta$ —— ③

② හි ආදේශයෙන්

$T = mg\cos\theta + \frac{m}{a}[u^2 - 2ga\cos\alpha + 2ga\cos\theta]$

$T = \frac{m}{a}[u^2 - 2ga\cos\alpha + 3ga\cos\theta]$ —— ④

③ හා ④ අනුව θ වැඩිවන විට v හා T දෙකම අඩුවේ. අංශුව වෘත්ත චලිතයේ යෙදී ... චලිතය වන්නේ

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ විට $v^2 > 0$ හා $T = 0$ වුවහොත් පමණි.

$T = 0$ වන්නේ $\theta = \theta_1$ විටයි.

$\cos\theta_1 = \frac{2ga\cos\alpha - u^2}{3ga}$ වේ

එනම් $\theta_1 = \cos^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(2\cos\alpha - \frac{u^2}{ga}\right)\right]$ වේ

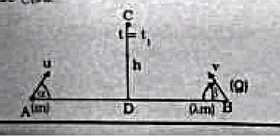
මේ අනුව අංශුව OP රේඛාව ... $\cos^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(2\cos\alpha - \frac{u^2}{ga}\right)\right]$ කෝණයක් සාදන විට වෘත්ත චලිතයෙන් ඉවත් වී ... චලිතය ඇරඹේ.

$\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ විට $-1 < \cos\theta_1 < 0$ බැවින්

මේ සඳහා $-1 < \frac{2ga\cos\alpha - u^2}{3ga} < 0$ විය යුතුය.

මෙමගින් $ga(3 + 2\cos\alpha) > u^2 > 2ga\cos\alpha$ බව ලැබේ.

03.



$t = t_1$ විට අංශු ... AB ට h උසින් පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේදී හමුවේ නම්,

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ↑ යෙදීමෙන්

(P) ට $h = u\sin\alpha\, t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ —— ①

(Q) ට $h = v\sin\beta\, t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ —— ②

① = ② න් $u\sin\alpha = v\sin\beta$ බව ලැබේ ($\because t_1 \neq 0$ නිසා)

$v = u + at$ ↑, කාලයක T ($T \leq t_1$) අවස්ථාවේ ලැබීමෙන්

(P) ට ↑ $v_P = u\sin\alpha - gT$ —— ③

(Q) ට ↑ $v_Q = v\sin\beta - gT$ —— ④

$u\sin\alpha = v\sin\beta$ නිසා $v_P = v_Q$ වේ. ... $T \leq t_1$ සඳහා සත්‍ය වේ. ∴ ... P සිරස් චලිතය ... Q හි සිරස් ... Q ද සිරස් චලිතය වේ ...

∴ P හා Q අතර ... සරල ... වේ.

(i) $T = t_1$ විට ③ ට අනුව $v_P = 0$ නිසා (C යනු උපරිම ලක්ෂ්‍යය බැවින්)

$0 = u\sin\alpha - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{u\sin\alpha}{g}$ —— ⑤

A → C තෙක් තිරස් චලිතය

$AD = u\cos\alpha \cdot t_1$

B → C තෙක් තිරස් චලිතය

$DB = v\cos\beta \cdot t_1$

$AD + DB = AB = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$

$= \frac{2u\sin\alpha}{g} \cdot u\cos\alpha$

$= 2t_1 u\cos\alpha$ (⑤ න්)

$u\cos\alpha\, \cancel{t_1} + v\cos\beta\, \cancel{t_1} = 2\cancel{t_1} \cdot u\cos\alpha$

$\underline{\underline{v\cos\beta = u\cos\alpha}}$

(ii) $\xrightarrow{u\cos\alpha}$ (m) (λm) $\xleftarrow{v\cos\beta = u\cos\alpha}$ (i) අනුව

(m (1 + λ)) → v_0 (හැදුණු පසු)

ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයට අනුව

→ $\cancel{m}u\cos\alpha - \lambda\cancel{m} \cdot u\cos\alpha = \cancel{m}(1 + \lambda)v_0$

$\underline{u\cos\alpha\,\frac{(1 - \lambda)}{(1 + \lambda)} = v_0}$

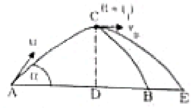
(iii) P අංශුව ළඟාවූ උපරිම උස CD = h නම්,

↑ $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$0 = u^2\sin^2\alpha - 2gh$

$h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

සංයුක්ත අංශුව E හිදී තලයට ළඟාවේ නම්,



C → E චලිතය සලකා

↓ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2$

$t_2 = \frac{u\sin\alpha}{g} = t_1$ වේ

... P හි චලිතය සැලකීමෙන්

$AD = u\cos\alpha \times t_1 = u\cos\alpha \cdot \frac{u\sin\alpha}{g}$

$DE = v_0 \times t_2$ (හැදුණු පසු චලිතය)

$AE = AD + DE$ බැවින්

∴ $AE = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} + \frac{(1 - \lambda)}{(1 + \lambda)}u\cos\alpha \cdot \frac{u\sin\alpha}{g}$

$= \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\left[1 + \frac{(1 - \lambda)}{(1 + \lambda)}\right]$

$AE = \underline{\underline{\frac{u^2\sin 2\alpha}{g(1 + \lambda)}}}$

P ට සාපේක්ෂව Q හි ස්කන්ධය කුඩා නම් λ → 0 වේ

එවිට $AE = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ එනම් E = B වේ

Q ට සාපේක්ෂව P හි ස්කන්ධය කුඩා නම් λ → ∞ වේ

එවිට AE = 0, එනම් E = A වේ

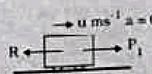
P හා Q හි ස්කන්ධ සමාන නම් λ = 1

එවිට $AE = \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g} = \frac{AB}{2}$

එවිට E යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

$\because AB = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ බැවිනි.

04. (a)

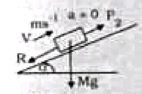


... ක්ෂමතාව $P_1 = \frac{1000 \times H}{u}$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

→ $P_1 - R = M \times 0$

$R = \frac{1000 \times H}{u}$ N



$P_2 = \frac{1000 \times H}{v}$

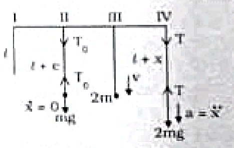
↗ $P_2 - R - Mg\sin\alpha = 0$

$\frac{1000\,H}{v} - \frac{1000\,H}{u} = Mg\sin\alpha$

$1000\,H\left(\frac{u - v}{vu}\right) = Mg\sin\alpha$

$\underline{H = \frac{uv\,Mg\sin\alpha}{1000\,(u - v)}\ kW}$

(b)



II අවස්ථාව, λ යනු ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය නම්,

$T_0 = mg$ ($\because \ddot{x} = 0$ නිසා)

$T_0 = \frac{\lambda c}{l}$

$\frac{\lambda c}{l} = mg$

$\underline{\lambda = \frac{lmg}{c}}$

III අවස්ථාව, ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය

↓ $m \times 0 + m \times u = 2m \times v$

u යනු Q අංශුව c දුරක් වැටීමෙන් ලබා ගන්නා ප්‍රවේගයයි.

$u^2 = 0 + 2gc$

$v = \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{gc}{2}}$

IV අවස්ථාව,

$T = \frac{\lambda x}{l} = \frac{\cancel{l}mg}{c} \times \frac{x}{\cancel{l}} = \frac{mg\,x}{c}$

$\underline{F} = m\underline{a}$ ↓ යෙදීමෙන්

$2mg - T = 2m\ddot{x}$

$$2mg - \frac{mgx}{c} = 2m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{-g}{2c}x + g$$

$\ddot{x} + \omega^2 x - 2\omega^2 c = 0 \;(\because \omega^2 = \frac{g}{2c})$

$\underline{\ddot{x} + \omega^2 (x - 2c) = 0}$

$x = 2c + a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ——— ①

$t = 0$ විට $x = c$ බැවින්

$c = 2c + a \Rightarrow \underline{a = -c}$

①. t විෂයෙන් අවකලනයෙන්

$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$ ——— ②

$t = 0$ විට $\dot{x} = \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{gc}{2}}$ නිසා

$\sqrt{\frac{gc}{2}} = b\omega = b\sqrt{\frac{g}{2c}} \Rightarrow \underline{b = c}$

② න් $\dot{x} = c\omega\sin\omega t + c\omega\cos\omega t$

$\dot{x} = c\omega(\sin\omega t + \cos\omega t)$

$t = t_1$ විට $\dot{x} = 0$ වේ නම් [illegible]

$0 = c\omega(\sin\omega t_1 + \cos\omega t_1)$

$\sin\omega t_1 = -\cos\omega t_1$

$\tan\omega t_1 = -1$

$\omega t_1 = \frac{3\pi}{4}$

$t_1 = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2c}{g}}} = \underline{\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{2c}{g}}}$

[illegible]

① න් $x = 2c - c\cos\left(\omega \cdot \frac{3\pi}{4\omega}\right) + c\sin\left(\omega \cdot \frac{3\pi}{4\omega}\right)$

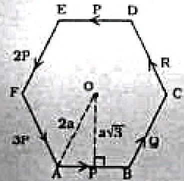
$x = 2c - c\cos\frac{3\pi}{4} + c\sin\frac{3\pi}{4}$

$= 2c - c\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 2c + \sqrt{2}\,c$

[illegible] $= \sqrt{2}\,c(1 + \sqrt{2})$ $(\dot{x} = 0$ වන$)$

05. (a) (i)



[illegible]

$G \neq 0$ හා [illegible] $= 0$ වේ.

[illegible] (AB හා AE) [illegible]

$\rightarrow \cancel{P} + Q\cos 60 - R\cos 60 - \cancel{P}$

$- 2P\cos 60 + 3P\cos 60 = 0$

$R - Q = P$ ——— ①

$\uparrow (Q + R - 2P - 3P)\cos 30 = 0$

$Q + R = 5P$ ——— ②

① + ② $\underline{R = 3P\text{ N}}$; ② - ① $\underline{Q = 2P\text{ N}}$

[illegible] O [illegible]

$(P + Q + R + P - 2P + 3P)\,a\sqrt{3}$

$= (7P + 3P + 2P)\,a\sqrt{3}$

$= \underline{12\sqrt{3}\,a\,P\text{ N m}}$

(ii) [illegible] AD [illegible] AD [illegible]

$\cancel{P}\cancel{\cos 30} - 3P\cos 30 - P\cancel{\cos 30}$

$+ R\cos 30 = 0$

$\underline{R = 3P\text{ N}}$

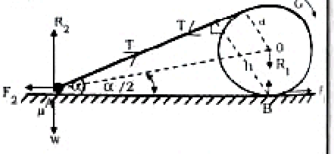
[illegible] O [illegible]

$(P + Q + R + P + 2P + 3P)\,a\sqrt{3} = 0$

$7P + Q + 3P = 0$

$\underline{Q = -10P\text{ N}}$

(b)



[illegible]

[illegible] $\rightarrow T\cos\alpha = F_2$ ——— ①

$\uparrow T\sin\alpha + R_2 = w$ ——— ②

$F_2 = \mu R_2$ ——— ③

O [illegible]

① හා ③ $T\cos\alpha = \mu R_2$ ——— ④

② හා ④ න් $T\cos\alpha = \mu(w - T\sin\alpha)$

$T(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu w$

$$T = \frac{\mu w}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

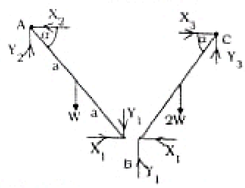
B [illegible]

$T \times AB\sin\alpha = G$; $AB = a\cot\frac{\alpha}{2}$

$T \times a\cot\frac{\alpha}{2}\sin\alpha = G$

$$\underline{\frac{\mu wa}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}(1 + \cos\alpha) = G}$$

06. (a) (i)



[illegible]

A වටා AB ට

$W \times a\cos\alpha + Y_1 \times 2a\cos\alpha$

$- x_1 \times 2a\sin\alpha = 0$ ——— ①

C වටා CB ට

$2W \times a\cos\alpha - Y_1 \times 2a\cos\alpha -$

$X_1 \times 2a\sin\alpha = 0$ ——— ②

① + ② න්

$3W\cancel{a}\cos\alpha = 4\cancel{a}X_1\sin\alpha$

$X_1 = \frac{3W\cot\alpha}{4}$

① - ② න්

$-W\cancel{a}\cos\alpha + 4\cancel{a}Y_1\cos\alpha = 0$

$Y_1 = \frac{W}{4}$

AB [illegible]

$\rightarrow X_1 = X_2 = \frac{3W\cot\alpha}{4}$

$\uparrow Y_2 = W + Y_1 = \frac{5W}{4}$

BC [illegible]

$\rightarrow X_3 = X_1 = \frac{3W\cot\alpha}{4} = X_2$

$\uparrow Y_3 = 2W - Y_1 = \frac{7W}{4}$

③ [illegible]

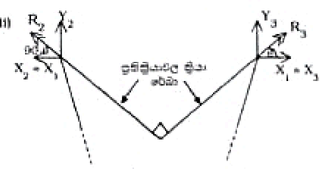
$\frac{5W}{4} \times \frac{7W}{4} = \frac{3W\cot\alpha}{4} \times \frac{3W\cot\alpha}{4}$

$35 = 9\cot^2\alpha$

$\tan^2\alpha = \frac{9}{35}$

$\underline{\tan = \frac{3}{\sqrt{35}}}$

(ii)



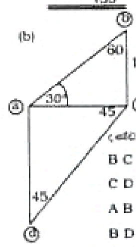
$\tan(90 - \theta) = \frac{Y_2}{X_2}$; $\tan\theta = \frac{Y_3}{X_3}$

$\cot\theta = \frac{Y_2}{X_2}$ $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$

$\frac{Y_3}{X_3} \cdot \frac{Y_2}{X_2} = 1$

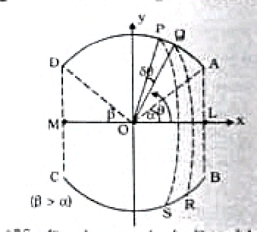
$\frac{Y_2}{X_2} = \frac{X_3}{Y_3}$ වේ. $\Rightarrow Y_2Y_3 = X_2X_3$ ——— ③

(b)



[illegible]	[illegible]	[illegible]
B C	[illegible]	$1000\sqrt{3}$ N
C D	[illegible]	2000 N
A B	[illegible]	$1000\sqrt{6}$ N
B D	[illegible]	$1000\sqrt{3}$ N

07.



$(\beta > \alpha)$

[illegible] X [illegible]

$P\hat{O}Q = \delta\theta$ ද $Q\hat{O}X = \theta$ ද [illegible]

PQ [illegible] $= a\,\delta\theta$

[illegible] $= a\sin\theta$

[illegible] $= (2\pi a\sin\theta)(a\,\delta\theta)\,\sigma$

[illegible]

y [illegible] $= a\cos\theta$

[illegible] y අක්ෂයේ සිට $\overline{x}$ දුරකින් [illegible]

$$\overline{x} = \frac{\int m_r x_r}{\int m_r} \quad \text{[illegible]}$$

$$\overline{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\pi-\beta} 2\pi a \sin\theta \, . \, a d\theta \, \sigma \, . \, a\cos\theta}{\int_{\alpha}^{\pi-\beta} 2\pi a \sin\theta \, . \, a d\theta \, \sigma}$$

$$= \frac{\pi a^3 \sigma \int_{\alpha}^{\pi-\beta} 2\sin\theta\cos\theta \, d\theta}{2\pi a^2 \sigma \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \sin\theta \, d\theta}$$

$$= \frac{\pi a^3 \sigma [\sin^2\theta]_{\alpha}^{\pi-\beta}}{-2\pi a^2 \sigma [\cos\theta]_{\alpha}^{\pi-\beta}}$$

$$= \frac{\pi a^3 \sigma [\sin^2\beta - \sin^2\alpha]}{-2\pi a^2 \sigma [-\cos\beta - \cos\alpha]}$$

$[\because \sin(\pi-\beta) = \sin\theta$ හා $\cos(\pi-\beta) = -\cos\beta$ නිසා$]$

$$= \frac{\pi a^3 \sigma [1 - \cos^2\beta - 1 + \cos^2\alpha]}{2\pi a^2 \sigma [\cos\alpha + \cos\beta]}$$

$$\overline{x} = \frac{\pi a^3 \sigma [\cos\alpha - \cos\beta](\cos\alpha + \cos\beta)}{2\pi a^2 \sigma [\cos\alpha + \cos\beta]} \quad \text{—— ①}$$

(i) [illegible] $\int m_r$ [illegible] $= 2\pi a^2 \sigma (\cos\alpha + \cos\beta)$ [illegible]

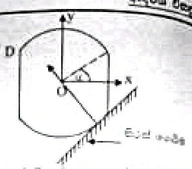
[illegible] O සිට $\frac{a}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)$ [illegible] (① [illegible])

(ii) ML [illegible] $= a\cos\alpha + a\cos\beta$
ML හි [illegible] O සිට ඇති දුර

$$= a\cos\alpha - \frac{(a\cos\alpha + a\cos\beta)}{2}$$

$$= \frac{(a\cos\alpha - a\cos\beta)}{2} = \overline{x} \text{ වේ}$$

[illegible]	[illegible]	[illegible] y අක්ෂයේ සිට දුර
[illegible]	$2\pi a^2\sigma(\cos\alpha + \cos\beta)$	$\frac{a}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)$
[illegible]	$\pi a^2 \sin^2\beta\sigma$	$-a\cos\beta$
සංයුක්ත වස්තුව	$2\pi a^2\sigma(\cos\alpha + \cos\beta) + \pi a^2 \sin^2\beta\sigma$	$\overline{x}$



[illegible] O [illegible] O [illegible]

එනම් $\overline{x} = 0$, y අක්ෂය [illegible]

$$\cancel{2\pi a^2\sigma}(\cos\alpha + \cos\beta) \cdot \frac{a}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)$$
$$- \cancel{\pi a^2}\sin^2\beta\cancel{\sigma}\,\cancel{a}\cos\beta = 0$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \sin^2\beta\cos\beta = 0$$

$$\cancel{1} - \sin^2\alpha - \cancel{1} + \sin^2\beta - \sin^2\beta\cos\beta = 0$$

$$\sin^2\beta(1 - \cos\beta) = \sin^2\alpha$$

$$\therefore \underline{\underline{\sin\alpha = \sin\beta\sqrt{1 - \cos\beta}}}$$

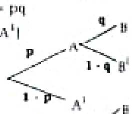
08. (a) A : [illegible]
B : [illegible]
$P(A) = p$ හා $P(B/A) = q$ [illegible]

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) = pq$$

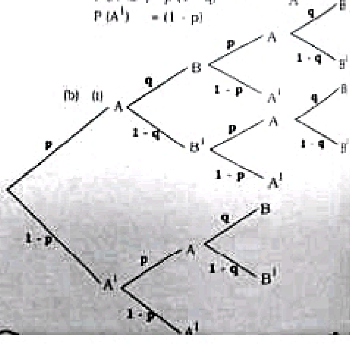
(i) $\{A \cap B, A \cap B^1, A^1\}$

(ii) $P(A \cap B) = pq$



$P(A \cap B^1) = p(1 - q)$
$P(A^1) = (1 - p)$

(b) (i)



(ii) [illegible]
$= P(A \cap B \cap A \cap B)$
$= (pq)(pq)$
$= p^2q^2$

(iii) X : [illegible], Y: [illegible]

[illegible]

$(X \cap Y) = (A \cap B \cap A \cap B^1) \cup (A \cap B^1 \cap A \cap B)$

[illegible]

$P(X \cap Y) = p\,q\,p(1 - q) + p(1 - q)\,p\,q$

$P(X \cap Y) = 2p^2q(1 - q)$

$X = (A \cap B \cap A \cap B) \cup (A \cap B \cap A \cap B^1) \cup (A \cap B^1 \cap A \cap B) \cup (A \cap B^1 \cap A \cap B^1)$

$P(X) = pqpq + pqp(1 - q) + pqp(1 - q) + p(1 - q)p(1 - q)$

$= pqp\,(q + 1 - q + 1 - q) + p^2(1 - q)^2)$

$= pqp\,(2 - q) + p^2(1 - q)^2$

$= p^2\,(2q - \cancel{q^2} + 1 - 2q + \cancel{q^2})$

$= p^2$

[illegible] $P(Y | X)$ වේ

$$P(Y | X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)} = \frac{2p^2q(1 - q)}{p^2} = 2q(1 - q)$$

(iv) [illegible] $= C$
[illegible] $= D$

$C = (A \cap B \cap A^1) \cup (A \cap B^1 \cap A^1) \cup (A^1 \cap A \cap B) \cup (A^1 \cap A \cap B^1)$

$P(C) = pq(1 - p) + p(1 - q)(1 - p) + (1 - p)pq + (1 - p)p(1 - q)$

$= p(1 - p)\,(q + 1 - q + q + 1 - q)$

$= 2p(1 - p)$

$C \cap D = (A \cap B \cap A^1) \cup (A^1 \cap A \cap B)$

$P(C \cap D) = pq(1 - p) + (1 - p)pq$

$= 2pq(1 - p)$

$$\therefore P(D | C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{2pq(1 - p)}{2p(1 - p)}$$

$\underline{\underline{= q}}$

09. $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ [illegible] n [illegible]

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

විචලතාව $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ වේ.

(i) $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ —— ① හා

$\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$ —— ② වේ.

$$\overline{z} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m + n}$$

① න් $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$ ද

② න් $\sum_{i=1}^{m} y_i = m\overline{y}$ ද නම්

$$\overline{z} = \frac{n\overline{x} + m\overline{y}}{m + n}$$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{z})^2$

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x} + \overline{x} + \overline{z})^2$

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\overline{x_i} - \overline{x})(\overline{x} - \overline{z}) + \sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - \overline{z})^2$

$= n\sigma_1^2 + \sigma + \sum_{i=1}^{n} d_1^2 \; (\because \overline{x} - \overline{z} = d_1$ නිසා$)$

$= n\sigma_1^2 + nd_1^2 \; (\because \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$ නිසා$)$

(iii) $\sigma^2 = \frac{1}{n + m}\left\{(x_1 - \overline{z})^2 + (x_2 - \overline{z})^2 + \ldots + (x_n - \overline{z})^2 + (y_1 - \overline{z})^2 + (y_2 - \overline{z})^2 + \ldots + (y_m - \overline{z})^2\right\}$

$= \frac{1}{n + m}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{z})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{z})^2\right\}$

$= \frac{1}{n + m}\left\{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)\right\}$

(II [illegible])

(b)

පන්ති	මධ්‍ය අගය	අපගමනය (d_i)	u_i	f_i	f_iu_i	$f_iu_i^2$
30 - 34	32	-15	-3	5	-15	45
35 - 39	37	-10	-2	10	-20	40
40 - 44	42	-5	-1	15	-15	15
45 - 19	47	0	0	30	0	0
50 - 54	52	+5	1	5	+5	5
55 - 59	57	+10	2	5	+10	20
				70	-35	125

(i) මධ්‍යන්‍යය $\overline{x} = A + C\left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

$$= 47 + \frac{5\,(-35)}{70} = 44.5$$

විචලතාව $\sigma_1^2 = C^2\left[\dfrac{\Sigma f_i u_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)^2\right]$

$$= 25\left[\frac{125}{70} - \left(\frac{-35}{70}\right)^2\right]$$

$$\overline{x} = 25\left[\frac{25}{14} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{25 \times 43}{28}$$

$$= 38.39$$

(ii) (a) I ආකාරයට අනුව

$$38 = \frac{(70 \times 44.5) + (30 \times \overline{y})}{70 + 30}$$

$(\because m = 70,\ n = 30\ \overline{x} = 44.5$ නිසා$)$

$\overline{y} = 22.83$

(a) III ආකාරයට අනුව

$$\sigma^2 = \frac{1}{m+n}\,(\,m\,(\sigma_2^2 + d_2^2)\ + n\,(\sigma_1^2 + d_1^2\,))$$

$m = 30,\ n = 70,\ \sigma_1^2 = 38.39,$

$d_2 = \overline{y} - \overline{z} = 22.83 - 38 = -15.17$

$d_1 = \overline{x} - \overline{z} = 44.5 - 38 = 6.5;\ \sigma^2 = 144$

$$144 = \frac{1}{30 + 70}\ (30\,(\sigma_2^2 + (-15.17)^2))$$
$$+ 70\,(38.39 + (6.5)^2))$$

$$14400 = 30\sigma_2^2 + 6903.9 + 2687.3$$
$$+ 2957.5$$

$$1851.3 = 30\,\sigma_2^2$$

$$\underline{\sigma_2^2 = 61.71}$$

*** ***