01. (a) $\alpha + \beta = -b \qquad \alpha\beta = c$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$
$$= [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$$
$$= (b^2 - 2c)^2 - 2c^2$$
$$= b^4 - 4b^2c + 4c^2 - 2c^2$$
$$= b^4 - 4b^2c + 2c^2$$

$$\alpha^4\beta^4 = (\alpha\beta)^4 = c^4$$

එවිට $\alpha^4 . \beta^4$ මූලවන වර්ගජ සමීකරණය

$$x^2 - (b^4 - 4b^2c + 2c^2)x + c^4 = 0 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$\frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1 = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\beta^4} = \frac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{\beta^4}$$

එසේම $\quad \frac{\beta^4}{\alpha^4} + 1 = \frac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{\alpha^4}$

දැන් $\quad \frac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{x} = y$ ලෙස ගනිමු

එවිට $\quad \frac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{y} = x$

එවිට (1) න් $\left(\frac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{y}\right)^2 - \frac{(b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2}{y} + c^4 = 0$

අවශ්‍ය සමීකරණය

$$\underline{c^4y^2 - (b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2y + (b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2 = 0}$$

(b) f(x), $(x - \alpha)$ න් බෙදූවිට ලබෙන Q(x) හා ශේෂය R නම්

$f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$

$\Rightarrow f(\alpha) = 0 \; Q(\alpha) + R = R$

f(x), $(x - \alpha)(x - \beta)$ න් බෙදූ විට ලබෙන $\phi(x)$ නම

$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\phi(x) + Ax + B; \quad \alpha \neq \beta$ විට

$\left.\begin{array}{l} f(\alpha) = A\alpha + B \\ f(\beta) = A\beta + B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{(\beta - \alpha)}$ හා

$B = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$

$f(x) = x^3 + kx^2 + k$ ලෙස ගනිමු.
$\alpha = 1, \beta = -2$ හෝ $\alpha = -2, \beta = 1$ වන විට $B = 0$ වේ ගනිමු.

එවිට $0 = \frac{-2f(1) - f(-2)}{-3}$

$\Rightarrow \; -2f(1) - f(-2) = 0$
$\Rightarrow \; -2f(1) = f(-2)$
$\Rightarrow \; -2(1 + k + k) = -8 + 4k + k$
$\Rightarrow \; -4k - 2 = -8 + 5k$
$\Rightarrow \; 9k = 6$
$\Rightarrow \; k = \frac{2}{3}$

02. (a) ගැහැණු ළමයි 7 අතරින් දෙදෙනෙකු තෝරා ගත හැකි විධි ගණන = $^7C_2$

පිරිමි ළමයි 8 අතරින් තිදෙනෙකු තෝරා ගත හැකි විධි ගණන = $^8C_3$

අවශ්‍ය කමිටු සැකසිය හැකි විධි ගණන

$$= {}^7C_2 \times {}^8C_3$$
$$= \frac{7!}{2!\,5!} \times \frac{8!}{3!\,5!}$$
$$= \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 5!}$$
$$= 21 \times 56$$
$$= \underline{1176}$$

(ii) කමිටුවකට උපරිම වශයෙන් පිරිමි ළමයි තිදෙනෙක් පමණක් ඇතුළත් විය හැකි විධි

ගැහැණු ළමයි 5 දෙනෙක්
පිරිමි ළමයි 1 ගැහැණු ළමයි 4
පිරිමි ළමයි 2 ගැහැණු ළමයි 3
පිරිමි ළමයි 3 ගැහැණු ළමයි 2

∴ අවශ්‍ය කමිටු සැකසිය හැකි විධි ගණන

$$= {}^8C_0 . {}^7C_5 + {}^8C_1 . {}^7C_4 + {}^8C_2 . {}^7C_3 + {}^8C_3 . {}^7C_2$$
$$= 1 \times \frac{7!}{2!\,5!} + \frac{8!}{1!\,7!} \times \frac{7!}{3!\,4!} + \frac{8!}{6!\,2!} \times \frac{7!}{3!\,4!} + \frac{8!}{5!\,3!} \times \frac{7!}{5!\,2!}$$
$$= (1 \times 21) + (8 \times 35) + (28 \times 35) + ((56 \times 21)$$
$$= 21 + 280 + 980 + 1176 = \underline{2457}$$

(iii) 15 දෙනා අතරින් ඕනෑම 5 දෙනෙක් තේරිය හැකි විධි ගණන = $^{15}C_5$

නියමිත පිරිමි ළමයා හා ගැහැණු ළමයා දෙදෙනාම එකම කමිටුවට තේරිය හැකි විධි ගණන = $^{13}C_3$

∴ අවශ්‍ය තේරිය හැකි විධි ගණන

$$= {}^{15}C_5 - {}^{13}C_3$$
$$= \frac{15!}{10!\,5!} - \frac{13!}{10!\,3!}$$
$$= \frac{13!}{5!\,10!}(15 \times 14 - 5 \times 4)$$
$$= \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 10!}(210 - 20)$$
$$= \frac{13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2} \times 190$$
$$= 13 \times 209$$
$$= \underline{2717}$$

(b) $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ අනුයාත සංගුණක තුන ${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$, ${}^nC_{r+2}$ යැයි සිතමු.

එවිට ${}^nC_r = 45$, ${}^nC_{r+1} = 120$, ${}^nC_{r+2} = 210$ බව දී ඇත.

$$\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}}{\dfrac{n!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}} = \frac{(n-r-1)!\,(r+1)!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{(n-r-1)!\,(r+1)\,r!}{(n-r)\,(n-r-1)!\,r!} = \frac{r+1}{n-r}$$

එවිට $\dfrac{r+1}{n-r} = \dfrac{45}{120} = \dfrac{3}{8}$ හා $\dfrac{r+2}{n-r-1} = \dfrac{120}{210} = \dfrac{4}{7}$

එනම් $8r + 8 = 3n - 3r$ හා $7r + 14 = 4n - 4r - 4$

$11r - 3n = -8$ —— ① $\quad 11r - 4n = -18$ —— ②

① හා ② න් $n = 10$ තවද $r = 2$

එවිට ${}^{10}C_2 = 45$, ${}^{10}C_3 = 120$, ${}^{10}C_4 = 225$

(c) විය නොහැක.

${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$, ${}^nC_{r+2}$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක වේ යැයි සිතමු. මෙහි $n > 0$

එවිට $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}}$ එනම් $\dfrac{n-r}{r+1} = \dfrac{n-r-1}{r+2}$

$(n-r)(r+2) = (n-\overline{r+1})(r+1)$

$nr + 2n - r^2 - 2r = nr + n - r^2 - 2r - 1$

$\Rightarrow n = -1$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ අනුයාත සංගුණක තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටිය නොහැක.

03. (a) $f(n) = 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු.

$n = 1$ විට $f(1) = 5^2 - 2^2 - 3^2 = 25 - 4 - 9 = 12$

$\therefore f(1)$, 6 න් බෙදේ.

$\therefore n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = p \in \mathbb{Z}^+$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට $f(p) = 5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1} = 6k$, $k \in \mathbb{Z}^+$

දැන් $f(p+1) = 5^{p+2} - 2^{p+2} - 3^{p+2}$

$= 5(5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1}) + 3.2^{p+1} + 2.3^{p+1}$

$= 5(5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1}) + 6(2^p + 3^p)$

$= 30k + 6(2p + 3p)$

$= 6(5k + 2p + 3p)$

$= 6m \quad ; m \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore n = p$ විට $f(n)$, 6 න් බෙදේ නම් $n = p + 1$ විට ද $f(n)$, 6 න් බෙදේ.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(n) = 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$, 6 න් බෙදේ.

(b) (i) ද්විපද ප්‍රමේයෙන් විට

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \dots {}^nC_rx^r + \dots + {}^nC_nx^n$

$x = 1$ විට

$2^n = 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_r + \dots + {}^nC_n$

$= 1 + \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$

$\therefore \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r = 2^n - 1$

දැන් ${}^nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2} < \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$

$\dfrac{n(n-1)}{2} < 2^n - 1$

$\therefore \dfrac{n(n-1)}{2} < 2^n$

$\therefore \dfrac{2^n}{n} > \dfrac{n-1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

(ii) $U_r = \dfrac{2^{r-1}r}{(r+1)(r+2)} = 2^{r-1}\dfrac{r}{(r+1)(r+2)}$

$= 2^{r-1}\left(\dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}\right)$ ලෙස ගනිමු

$= 2^{r-1}\left(\dfrac{2}{r+2} - \dfrac{1}{r+1}\right)$

$= \dfrac{2^r}{r+2} - \dfrac{2^{r-1}}{r+1}$

$= \underline{f(r) - f(r-1)}$

මෙහි $f(r) = \dfrac{2^r}{r+2}$ වේ

$r = 1$ විට $U_1 = f(1) - f(0)$

$r = 2$ විට $U_2 = f(2) - f(1)$

$r = 3$ විට $U_3 = f(3) - f(2)$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n$ විට $U_n = f(n) - f(n-1)$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0) = S_n$





$\therefore S_n = \dfrac{2^n}{n+2} - \dfrac{1}{2}$

$S_n = \dfrac{2^n}{n}\left(\dfrac{n}{n+2}\right) - \dfrac{1}{2}$

නමුත් $\dfrac{2^n}{n} > \left(\dfrac{n-1}{2}\right)$

$S_n > \dfrac{n(n-1)}{2(n+2)} - \dfrac{1}{2}$

තවද $n \to \infty$ විට $\dfrac{n(n-1)}{2(n+2)} - \dfrac{1}{2} \to \infty$

එනම් $\lim_{n\to\infty} S_n$ ; $\mathbb{R}$ හි නොපවතී.

04. $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ හෝ $z^2 + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ හෝ $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$w = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ යැයි ගනිමු

එවිට $\omega^2 = \dfrac{1 \mp 2\sqrt{3}i - 3}{4} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ එක සංකීර්ණ මූලයක් $\omega$ වනවිට $\omega^2$ අනෙක් මූලය වේ.

තවද, $= \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)} \times \dfrac{\left(\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

$= \dfrac{\left(\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

ඉහත ලබාගත් ප්‍රතිඵලය අනුව

$\dfrac{1}{1+\omega^2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\omega^3 = 1$ නිසා $\dfrac{1}{1+\omega^3} = \dfrac{1}{2}$

එලෙස $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1+\omega^r}\right) = \dfrac{1}{2}$, $r = 1, 2, 3$ සඳහා

$\dfrac{1}{1+\omega^r}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\mathrm{Re}\ Z = \dfrac{1}{2}$ රේඛාව මත පිහිටයි.

$(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)$

$= z_1^2 + \omega^3 z_2^2 + \omega^3 z_3^2 + (\omega^2 + \omega)z_1z_2 + (\omega^2 + \omega)z_1z_3 + (\omega^2 + \omega^4)z_2z_3$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 + \omega^2(1 + \omega^2)z_2z_3$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - \omega^3 z_2z_3$

$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3$

තත්ත්වයන් $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}i}{2} - \dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}i}{2} = -1$

හා $\omega^4 = \omega$ වන නිසා

එනම් $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3 = 0$

$\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ හෝ

$\underline{z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3}$

$z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ ලෙස ගනිමු

එවිට $z_1 - z_2 = -(1+\omega)z_2 - \omega^2 z_3$

$= \omega^2 z_2 - \omega^2 z_3 \qquad (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

$= \omega^2(z_2 - z_3)$ —— ①

තව $z_1 - z_3 = -\omega z_2 - (1 + \omega^2)z_3$

$= -\omega z_2 + \omega z_3 \qquad (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

$= -\omega(z_2 - z_3)$ —— ②

දැන් $|\omega| = |\omega^2| = 1$ නිසා

① හා ② න් $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

$\therefore z_1, z_2, z_3$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරයි.

එලෙස $z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3$ ලෙස ගත් විට ද

ඉහත පරිදි $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ බව ලැබේ.

එබැවින් ඉහත ප්‍රකාශය සත්‍යවේ.

එනම් $z_1, z_2, z_3$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරයි

05. (a)

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\tan(x + \Delta x) - \tan x}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x + \Delta x)\cos x - \cos(x + \Delta x)\sin x}{\Delta x \cos(x + \Delta x)\cos x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{(\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot \cos x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot \cos x}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(\because \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1\right)$$

$$= \sec^2 x$$

$\frac{d}{dx} \tan(\sin^{-1} x) = \sec^2(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $0<x<1$ විට

(b) $U = \ln(\cos x)$ යයි ගනිමු, $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

එවිට $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$

දාම නීතිය අනුව

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\tan x \cdot \frac{dy}{du}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 x \frac{dy}{du} - \tan x \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)$$

$$= -\sec^2 x \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - \tan x \cdot \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\sec^2 x \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{-1}{\tan x}\right) - \tan x \cdot \frac{d^2y}{du^2} \cdot (-\tan x)$$

$$\tan x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x \cdot \frac{dy}{dx} + \tan^3 x \cdot \frac{d^2y}{du^2}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \frac{d^2y}{du^2} = \cos^2 x \sin x \frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx}$$

(c) $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$ ; $\frac{dy}{dt} = a\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2(t^2+1)}{(t^2-1)}$$

පරාමිතිය $t_0$ වන ලක්ෂ්‍යයේ දී C ට ඇඳි අභිලම්බයේ

$$\text{අනුක්‍රමණය} = \frac{-(t_0^2-1)}{2(t_0^2+1)}$$

∴ පරාමිතිය $t_0$ වන ලක්ෂ්‍යයේ දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය

$$y - a\left(t_0 - \frac{1}{t_0}\right) = \frac{-(t_0^2-1)}{2(t_0^2+1)}\left\{x - \frac{a}{2}\left(t_0 + \frac{1}{t_0}\right)\right\}$$

$$4(t_0^2+1)\,yt_0 - 4a(t_0^2+1)(t_0^2-1)$$

$$= -2t_0(t_0^2-1)x + a(t_0^2-1)(t_0^2+1)$$

$$4(t_0^2+1)t_0 y - 4a(t_0^4-1) = -2(t_0^2-1)t_0 x + a(t_0^4-1)$$

$$2(t_0^2-1)t_0 x + 4(t_0^2+1)t_0 y = 5a(t_0^4-1)$$

මෙම අභිලම්බය $(-13a, 0)$ හරහා යයි නම්

$$-26(t_0^2-1)t_0 a = 5a(t_0^4-1)$$

$$(t_0^2-1)(5t_0^2+26t_0+5) = 0$$

$$(t_0-1)(t_0+1)(5t_0+1)(t_0+5) = 0$$

$t_0 = \pm 1$ හෝ $t_0 = -\frac{1}{5}$ හෝ $t_0 = -5$

එනයින් $(-13a, 0)$ සිට C වක්‍රයට අභිලම්බ හතරක් ඇඳිය හැක. ඒවායේ අඩිවල පරාමිතීන් $\pm 1$, $-5$ හා $-\frac{1}{5}$ වේ.

06. (a)

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{(x-a)^2} + \frac{D}{(x+a)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x+a)^2(x-a) + B(x-a)^2(x+a) + C(x+a)^2 + D(x-a)^2$$

$x = a$ විට $C = \frac{1}{4a^2}$

$x = -a$ විට $D = \frac{1}{4a^2}$

$x^3$ හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

$0 = A + B$ —— ①

නියත සැසඳීමෙන්

$1 = -a^3A + a^3B + a^2C + a^2D$

$$\Rightarrow 1 = a^3(B-A) + a^2 \times \frac{1}{4a^2} + a^2 \times \frac{1}{4a^2}$$

$$\Rightarrow a^3(B-A) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B - A = \frac{1}{2a^3} \quad —— ②$$

① හා ② න් $B = \frac{1}{4a^3}$ හා $A = -\frac{1}{4a^3}$





$$\Rightarrow \frac{1}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a^3(x+a)} - \frac{1}{4a^3(x-a)} + \frac{1}{4a^2(x+a)^2} + \frac{1}{4a^2(x-a)^2}$$

දැන් $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a^3}\int \frac{dx}{(x+a)} - \frac{1}{4a^3}\int \frac{dx}{(x-a)} + \frac{1}{4a^2}\int \frac{dx}{(x+a)^2} + \frac{1}{4a^2}\int \frac{dx}{(x-a)^2}$

$$= \frac{1}{4a^3}\ln|x+a| - \frac{1}{4a^3}\ln|x-a| - \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{1}{(x+a)} - \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{1}{(x-a)} + C$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{2x}{(x-a)(x+a)} + C$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{1}{2a^2(x^2-a^2)} + C$$

(b) (i) $y = 2^x\ (>0) \Rightarrow \ln y = x \ln 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\ln 2}\right) = y$$

එනම් $\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = 2^x$ —— ①

(ii) ① න් $\int 2^t\, dt = \frac{2^t}{\ln 2} + C$ (අභිමත නියතයකි)

(iii) $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}}\, dx = I$ ලෙස ගනිමු

$t = \sqrt{x+1}$ ලෙස ගනිමු

එවිට $dt = \frac{dx}{2t}$ හා $\left\{\begin{array}{l} x = -1 \text{ විට } t = 0 \\ x = 1 \text{ විට } t = \sqrt{2} \end{array}\right\}$

$$\therefore I = \int_0^{\sqrt{2}} 2^t \cdot 2t\, dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} t \cdot 2^t\, dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} t \; d\left(\frac{2^t}{\ln 2}\right)$$

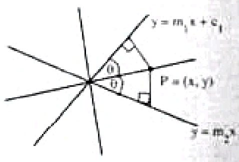
$$= 2\left\{\left[\frac{t\,2^t}{\ln 2}\right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2^t}{\ln 2}\, dt\right\}$$

$$= 2\left[\frac{t\,2^t}{\ln 2}\right]_0^{\sqrt{2}} - 2\left[\frac{2^t}{(\ln 2)^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\cdot 2^{\sqrt{2}}}{\ln 2} - \frac{2\cdot 2^{\sqrt{2}}}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^2}$$

$$= 2^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}\right) + \frac{2}{(\ln 2)^2}$$

07.




$y = m_1x + c_1$ හා $y = m_2x + c_2$ $(m_1 \neq m_2)$ යන රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත පිහිටි $P_{(x,y)}$ ලක්ෂ්‍යයක සිට රේඛාවලට ඇති ලම්බ දුර සමාන වන නිසා

$$\frac{y - m_1x - c_1}{\sqrt{1+m_1^2}} = \pm \frac{y - m_2x - c_2}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

එවිට ; $(y - m_1x - c_1)\sqrt{1+m_2^2} = \pm(y - m_2x - c_2)\sqrt{1+m_1^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 \equiv (a_2 - a_1)y = (a_2m_1 - a_1m_2)x + (a_2c_1 - a_1c_2) \\ \ell_2 \equiv (a_2 + a_1)y = (a_2m_1 + a_1m_2)x + (a_2c_1 + a_1c_2) \end{array}\right\}$$

ලෙස ගනිමු ; මෙහි $a_1 = \sqrt{1+m_1^2}$ හා $a_2 = \sqrt{1+m_2^2}$ වේ.

එවිට $\ell_1$ හා $\ell_2$ මගින් දී ඇති රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදක දෙක නිරූපණය කරයි.

$m_1 = -m_2$ නම් $a_1 = a_2$ ($\because m_1 \neq m_2$)

එවිට $\ell_1$ : x = නියතයක් හා

$\ell_2$ : y = නියතයක් වේ.

$\therefore \ell_1 \perp \ell_2$ වේ.

$m_1 \neq -m_2$ විට

$\ell_1 : y = M_1 x + k_1$ ; මෙහි $M_1 = \dfrac{a_2 m_1 - a_1 m_2}{a_2 - a_1}$

$\ell_2 : y = M_2 x + k_2$ ; මෙහි $M_2 = \dfrac{a_2 m_1 + a_1 m_2}{a_2 + a_1}$

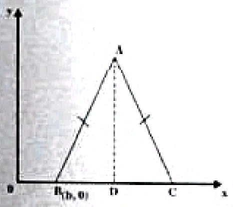
එවිට $M_1 M_2 = \dfrac{a_2^2 m_1^2 - a_1^2 m_2^2}{a_2^2 - a_1^2}$

$= \dfrac{(1+m_2^2) m_1^2 - (1+m_1^2) m_2^2}{1+m_2^2 - (1+m_1^2)}$

$= \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{m_2^2 - m_1^2} = -1$

$\therefore \ell_1 \perp \ell_2$ වේ.

(b)




AD = h ලෙස ගනිමු

එවිට 6h = 18 $\Rightarrow$ h = 3

A = (a, 3), B = (b, 0) හා C = (b + 6, 0)

$\Rightarrow$ BD = DC = 3 = a - b

AB හි සමීකරණය $y = \dfrac{3-0}{a-b}(x-b)$

$y = \dfrac{3}{3}(x-b)$

$\underline{y = x - b}$

AC හි සමීකරණය

$y - 0 = \dfrac{3-0}{a-(b+6)}[x-(b+6)]$

$y = \dfrac{3}{a-b-6}[x-(b+6)]$

$y = \dfrac{3}{-3}[x-(b+6)]$

$\underline{y = -x + b + 6}$

B කෝණයේ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

$\ell_1 : y(1-\sqrt{2}) = x - b$ හා ((8) හි $m_1 = 1, m_2 = 0, c_1 = -b$, $c_2 = 0$ නිසා)

$\ell_2 : y(1+\sqrt{2}) = x - b$

දැන් $(y(1+\sqrt{2}) - x + b)_{(a,3)} = (3 + 3\sqrt{2} + b - a)$

$= (3 + 3\sqrt{2} - 3) = 3\sqrt{2} > 0$

$[y(1+\sqrt{2}) - x + b]_{(b+6,0)}$

$= [-(b+6) + b] = -6 < 0$

$\therefore \ell_2$ රේඛාව දෙපස A හා C පිහිටයි

එනම් $\hat{B}$ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය $\ell_2$ වේ.

$\hat{C}$ හි සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

((8) හි $m_1 = -1, m_2 = 0, c_1 = b + 6$ හා $c_2 = 0$ නිසා)

$\ell_3$ : $y = (\sqrt{2}+1)x - (\sqrt{2}+1)(b+6)$

$\ell_4$ : $y = -(\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}-1)(b+6)$ වේ

දැන් $[y + (\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}-1)(b+6)]_{(a,3)} = 6 - 3\sqrt{2} > 0$

$[y + (\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}-1)(b+6)]_{(b,0)} = -6(\sqrt{2}-1) < 0$ ($\because a - b = 3$)

$\therefore$ A හා B ලක්ෂ්‍ය $\ell_4$ හි දෙපස වේ.

$\therefore \hat{C}$ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය $\ell_4$ වේ.

AB $\perp$ AC හා AB = AC නිසා

$A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \ell_2$ හා $\overrightarrow{OX}$ අතර කෝණය $= \dfrac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \ell_2$ හි අනුක්‍රමණය $= \tan\dfrac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{8} = \underline{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$

$\hat{A}$ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය AD වන අතර එහි සමීකරණය x = b + 3 වේ.





දැන් $\ell_2 \equiv y(1+\sqrt{2}) = x - b$

$\Rightarrow y = (\sqrt{2}-1)(x-b)$ — ①

$\ell_4 \equiv y = (\sqrt{2}-1)(-x+b+6)$ — ②

① හා ② විසඳීමෙන් $\ell_2$ හා $\ell_4$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය

$x = b + 3,\ y = 3(\sqrt{2}-1)$ ; b පරාමිතියක් මගින් ලැබේ.

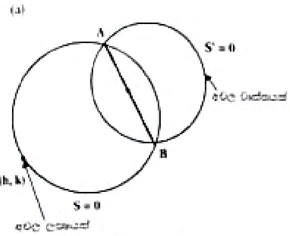
එවිට $\ell_2$, $\ell_4$ හා AD සංගාමී වේ

එහි සංගාමී වන ලක්ෂ්‍යයෙහි

$y = 3(\sqrt{2}-1)$ (නියතයකි) නිසා ABC ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ පථය

$\underline{y = 3(\sqrt{2}-1)}$ වේ.

08. (a)




$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$

AB රේඛාවේ සමීකරණය S - S' = 0

එනම් $2(g-g')x + 2(f-f')y + c - c' = 0$

AB, S' = 0 හි විෂ්කම්භයක් නිසා එය (-g', -f') හරහා යයි.

එවිට $2(g-g')(-g') + 2(f-f')(-f') + c - c' = 0$ — ①

S = 0 වෘත්තය (h, k) හරහා යන නිසා

$h^2 + k^2 + 2gh + 2fk + c = 0$ — ②

① හා ② න්

$-2gg' + 2g'^2 - 2ff' + 2f'^2 - h^2 - k^2 - 2gh - 2fk - c' = 0$

$-2g(g'+h) - 2f(f'+k) + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

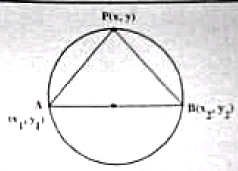
$2(g'+h)(-g) + 2(f'+k)(-f) + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

$\therefore$ S = 0 හි කේන්ද්‍රය

$2(g'+h)x + 2(f'+k)y + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

සරල රේඛාව මත වේ. g', f', h, k හා c' නියත නිසා

මෙම සරල රේඛාව අවශ්‍ය සරල රේඛාවයි.




P(x, y) යනු වෘත්තය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ගනිමු

එවිට $\hat{P} = 90°$ නිසා

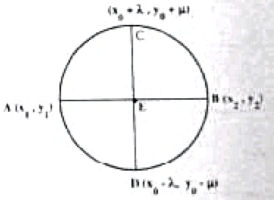
$AP^2 + PB^2 = AB^2$

$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$

$x^2 + y^2 - (x_1+x_2)x - (y_1+y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

එනම්

$\underline{(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0}$




$E \equiv (x_0, y_0)$ ලෙස ගනිමු

E යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නිසා

$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ හා $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$C \equiv (x_0 + \lambda, y_0 + \mu)$ නම් CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E නිසා

$D \equiv (x_0 - \lambda, y_0 - \mu)$ වේ.

$CE^2 = \lambda^2 + \mu^2$ හා CE = ½ AB වේ.

$\Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = ¼[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]$ — ①

CE $\perp$ AB නිසා

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = -1$$

$$\mu(y_2 - y_1) = -\lambda(x_2 - x_1) \quad \text{— ②}$$

$$① \Rightarrow \lambda^2 + \lambda^2 \frac{(x_2 - x_1)^2}{(y_2 - y_1)^2} = \tfrac{1}{4}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

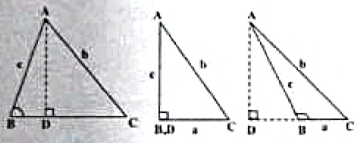
$$\Rightarrow \lambda^2 = \tfrac{1}{4}(y_2 - y_1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1)$$

එවිට ② න් $\mu = \pm \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)$

06. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන් ඔප්පු කරන්න

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ බව.}$$




I රූපය ii රූපය iii රූපය

I අවස්ථාව ABC සුළුකෝණී විට (i) රූපය

$$AD = AB \sin B = AC \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}$$

එලෙසම $\dfrac{\sin A}{BC} = \dfrac{\sin C}{AB}$

$$\therefore \frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}$$

එනම් $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

II අවස්ථාව B සෘජුකෝණී විට (ii) රූපය

$$AD = AB = AC \sin C$$

$$AB \sin 90^\circ = AC \sin C$$

$$\Rightarrow AB \sin B = AC \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

III අවස්ථාව ABC මහාකෝණී විට (iii) රූපය

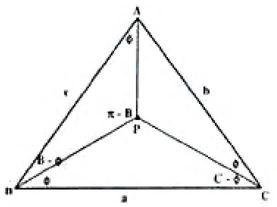
$$AD = AB \sin(\pi - B) = AC \sin C$$

$$AB \sin B = AC \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

මේ අනුව ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$




ABP Δ න්

$$\frac{BP}{\sin \phi} = \frac{c}{\sin(\pi - B)} \Rightarrow BP = \frac{c \sin \phi}{\sin(\pi - B)}$$

$$= \frac{c \sin \phi}{\sin B} \quad \text{— ①}$$

BPC Δ න් $\quad CP = \dfrac{a \sin \phi}{\sin C} \quad$ — ②

APC Δ න් $\quad AP = \dfrac{b \sin \phi}{\sin A} \quad$ — ③

$$\frac{\sin(C - \phi)}{\sin \phi} = \frac{BP}{CP} = \frac{c \sin C}{a \sin B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(C - \phi)}{\sin C \sin \phi} = \frac{c}{a \sin B}$$





$$\Rightarrow \frac{ab}{c}(\cot \phi - \cot C) = \frac{b}{\sin B} \quad \text{— I}$$

$$\frac{ac}{b}(\cot \phi - \cot B) = \frac{a}{\sin A} \quad \text{— II}$$

$$\frac{bc}{a}(\cot \phi - \cot A) = \frac{c}{\sin C} \quad \text{— III}$$

Sin නීතියෙන්

$$\frac{ab}{c}(\cot \phi - \cot C) = \frac{ac}{b}(\cot \phi - \cot B) = \frac{bc}{a}(\cot \phi - \cot A)$$

(b)

$$\cos x + \cos y = 1$$

$$\sin x + \sin y = t$$

$$x + y + z = \pi \; ; \; x, y, z \geq 0$$

$$\therefore t \geq 0$$

(i)

$$t = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$1 = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow t = \tan\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad \text{— (I)}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(t) = \frac{x + y}{2}$$

(ii)

$$1 + t^2 = 2 + 2\cos(x - y) \quad \text{— (II)}$$

$$-1 \leq \cos(x - y) \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq t^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{3} \quad (\because t \geq 0)$$

$t^2 = 3$ විට $x - y = 0$

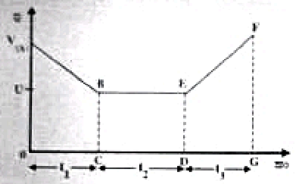
$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan y = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{3} = z$$

*****

01. (a)




OABC □ = d ; BCDE □ = 2d ; DEFG □ = 3d

බව දී ඇත.

[illegible] කාලය $= \frac{6d}{V}$

→ [illegible]

$\frac{1}{2}(V + U)t_1 = d$ ; $U \times t_2 = 2d$ ; $\frac{1}{2}(U + V)t_3 = 3d$

$t_1 = \frac{2d}{V + U}$ ; $t_2 = \frac{2d}{U}$ ; $t_3 = \frac{6d}{U + V}$

[illegible] කාලය $= t_1 + t_2 + t_3$

$$= \frac{2d}{V + U} + \frac{2d}{U} + \frac{6d}{U + V}$$

$$= \frac{2d}{U(V + U)}[U + V + U + 3U]$$

$$= \frac{2d(5U + V)}{U(V + U)}$$

[illegible] $= \frac{2d(5U + V)}{U(V + U)} - \frac{6d}{V}$

$$= \frac{2d}{UV(V + U)}[5UV + V^2 - 3U^2 - 3UV]$$

$$= \frac{2d}{UV(V + U)}[V^2 + 2UV - 3U^2]$$

$$= \frac{2d}{UV(V + U)}(V + 3U)(V - U)$$

(b) [illegible] $= v$

[illegible] $=$

[illegible] $=$ [illegible] $+$ [illegible]

$= v +$

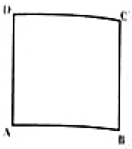
$=$ $+ v$

A → B සඳහා $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_1}$

$= \overrightarrow{PR_1}$

C → D සඳහා $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_3}$

$= \overrightarrow{PR_3}$



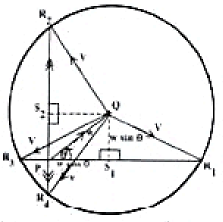

[illegible]

B → C සඳහා $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_2}$

$= \overrightarrow{PR_2}$

D → A සඳහා $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_4}$

$= \overrightarrow{PR_4}$




A → B [illegible] කාලය $t_1$ නම් $t_1 = \frac{a}{|\overrightarrow{PR_1}|}$

C → D [illegible] කාලය $t_3$ නම් $t_3 = \frac{a}{|\overrightarrow{PR_3}|}$

$$t_1 + t_3 = \frac{a}{PR_1} + \frac{a}{PR_3}$$

$$= \frac{a}{(S_1R_1 + PS_1)} + \frac{a}{(S_1R_3 - PS_1)}$$

$$= \frac{a}{(S_1R_1 + PS_1)} + \frac{a}{(S_1R_1 - PS_1)}$$

[ ∵ $S_1R_3 = S_1R_1$ [illegible] ]

$$= \frac{a[S_1R_1 - PS_1 + S_1R_1 + PS_1]}{(S_1R_1 + PS_1)(S_1R_1 - PS_1)}$$



$$= \frac{2aS_1R_1}{S_1R_1^2 - PS_1^2} = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}}{v^2 - w^2\sin^2\theta - w^2\cos^2\theta}$$

$$t_1 + t_3 = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}}{v^2 - w^2}$$

B → C හා D → A [illegible] කාලය $t_2$ හා $t_4$

නම් $t_2 + t_4$ [illegible] $\theta$ වෙනුවට $\frac{\pi}{2} - \theta$ [illegible] ( ∵ $Q\hat{P}S_2 = \pi/2 - \theta$ ) [illegible]

$$\therefore t_2 + t_4 = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2(\pi/2 - \theta)}}{(v^2 - w^2)}$$

[illegible] කාලය T නම්

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}}{(v^2 - w^2)} + \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}}{(v^2 - w^2)}$$

$$T = \frac{2a}{(v^2 - w^2)}[\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta} + \sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}]$$

θ [illegible]

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{2a}{(v^2 - w^2)}\left[\frac{-2w^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}} + \frac{2w^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}}\right]$$

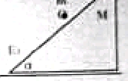
$$= \frac{4aw^2\sin\theta\cos\theta[\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta} - \sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}]}{(v^2 - w^2)\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ විට $\frac{dT}{d\theta} > 0$ හා $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ විට $\frac{dT}{d\theta} < 0$

[illegible] $\theta = \frac{\pi}{4}$ විට T [illegible] වේ.

02. (a) [illegible] $= \rightarrow a_1$




[illegible] $=$

[illegible] $=$ [illegible] $+$ [illegible]

$=$ $+ \rightarrow a_1$

$\underline{F} = \underline{m}\,\underline{a}$ [illegible] [illegible]

$mg\sin\alpha = m(a_2 - a_1\cos\alpha)$ —— ①

[illegible] → [illegible]

$0 = Ma_1 + m(a_1 - a_2\cos\alpha)$ —— ②

② න් $ma_2\cos\alpha = (M + m)a_1$

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(M + m)}{m\cos\alpha}$ [illegible] වේ.

① හා ② [illegible]

$$a_2 = g\sin\alpha + \frac{ma_2\cos^2\alpha}{(M + m)}$$

$$a_2\left(1 - \frac{m\cos^2\alpha}{(M + m)}\right) = g\sin\alpha$$

$$a_2\left(\frac{M + m(1 - \cos^2\alpha)}{M + m}\right) = g\sin\alpha$$

$$\therefore a_2 = \frac{(M + m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

[illegible]

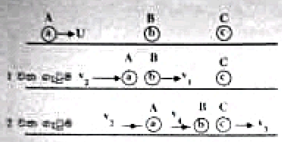
$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ [illegible]

$$O = VT - \frac{1}{2}a_2T^2$$

$$T = \frac{2V}{a_2}$$

$$= \frac{2V(M + m\sin^2\alpha)}{(M + m)g\sin\alpha}$$

(b)




1 වන ගැටුම සඳහා

ග. සං. නි. යෙදීමෙන් $\quad bv_1 + av_2 = au$ —— ①

නි. ප. නි. යෙදීමෙන් $\quad v_1 - v_2 = eu$ —— ②

① හා ② විසඳීමෙන්

$$v_1 = \frac{au(1+e)}{a+b} \; ; \; v_2 = \frac{u(a-be)}{a+b}$$

2 වන ගැටුම සඳහා

ග. සං. නි. යෙදීමෙන් $\quad cv_3 + bv_4 = bv_1$ —— ③

නි. ප. නි. යෙදීමෙන් $\quad v_3 - v_4 = ev_1$ —— ④

③ හා ④ විසඳීමෙන්

$$v_3 = \frac{bv_1(1+e)}{b+c} \; ; \; v_4 = \frac{v_1(b-ce)}{b+c}$$

$$v_3 = \frac{b(1+e)}{(b+c)} \times \frac{au(1+e)}{(a+b)} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)}$$

$$= \frac{u(1+e)^2}{(1+\frac{b}{a})(1+\frac{c}{b})}$$

① වන ගැටුමෙන් පසු A නිශ්චල වේ නම්, $v_2 = 0$ විය යුතුය. එම සඳහා $a = be$ ද.

② වන ගැටුමෙන් පසු B නිශ්චල වෙවිනම් $v_4 = 0$ විය යුතුය. එම සඳහා $b = ce$ ද විය යුතුය.

$\frac{a}{b} = e \Rightarrow a : b = e : 1 \quad \frac{b}{c} = e \Rightarrow b : c = e : 1$

$\therefore a : b : c = e^2 : e : 1$ වේ

මෙම අවස්ථාවේ දී අවසානයේ ඉතිරිවන චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2} cv_3^2$

මුල් චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2} au^2$

$$\text{භාගයක් ලෙස} = \frac{\frac{1}{2} cv_3^2}{\frac{1}{2} au^2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{v_3^2}{u^2}$$

$$v_3 = \frac{u(1+e)^2}{(1+\frac{b}{a})(1+\frac{c}{b})} = \frac{u(1+e)^2}{(1+\frac{1}{e})(1+\frac{1}{e})} = \frac{e^2u(1+e)^2}{(1+e)^2}$$

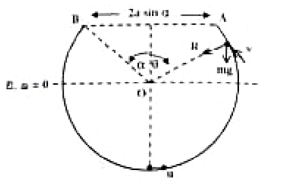
$= e^2u$

$\therefore$ ඉතිරි චාලක ශක්තිය මුල් චාලක ශක්තියේ භාගයක් ලෙස

$$= \frac{c}{a} \times \frac{e^4u^2}{u^2} = \frac{ce^4}{a} = \frac{e^4}{e^2} = e^2$$

$[\because a : b : c = e^2 : e : 1$ නිසා $a : c = e^2 : 1]$

03.




(i) අංශුවේ ස්කන්ධය m යයි ගනිමු.

ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}mu^2 - mga = \frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta$$

$$v^2 = u^2 - 2ga(1+\cos\theta) \quad —— ①$$

$$v = \sqrt{u^2 - 2ga(1+\cos\theta)}$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$mg\cos\theta + R = m\frac{v^2}{a}$$

$$R = \frac{m}{a}[u^2 - 2ga - 2ga\cos\theta - ga\cos\theta]$$

$$R = \frac{m}{a}[u^2 - 2ga - 3ga\cos\theta]$$

(ii) අංශුව A දාරය කරා යයි නම් $\cos\theta = \frac{1}{4}$ විට $R > 0$ විය යුතුය. (එනම් දාරයට ළඟාවන තුරුද අංශුව පෘෂ්ඨය ස්පර්ශව පැවතිය යුතුය.)

$$\Rightarrow \frac{m}{a}[u^2 - 2ga - 3ga \times \frac{1}{4}] > 0 \Rightarrow u^2 - \frac{11ga}{4} > 0$$

එනම් $u^2 > \frac{11ga}{4}$ නම් අංශුව පාත්‍රයේ දාරයට ළඟාවේ දීය.





(iii) අංශුව පාත්‍රයේ දාරයෙන් ඉවත්වන මොහොතේ වේගය $v = v'$ නම්

① න් $(v')^2 = u^2 - 2ga(1 + \frac{1}{4}) = u^2 - \frac{5}{2}ga$ වන අතර එම

දිශාව තිරස සමග α කෝණයක් සාදයි නම් $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ වේ

ඉන්පසුව අංශුව ප්‍රක්ෂේපයක් ලෙස චලිත වේ

$A \to C$ දක්වා චලිතය සලකා

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$\leftarrow \quad AC = v'\cos\alpha\, t_1$

$\uparrow \quad O = v'\sin\alpha\, t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$

$t_1 = \frac{2v'\sin\alpha}{g}$ නිසා

$$AC = \frac{2v'^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

අංශුව පාත්‍රය තුළට නොවැටීමට $AC > AB$ විය යුතුයි

$\frac{2v'^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} > 2a\sin\alpha$ ($\because$ දැන් මෙම විට $\theta = \alpha$ වේ)

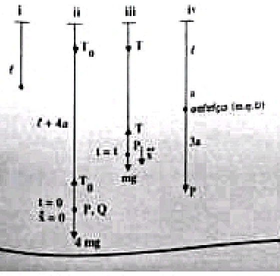
$$v'^2 > \frac{ga}{\cos\alpha}$$

$$u^2 - \frac{5ga}{2} > \frac{ga}{\frac{1}{4}}$$

$$u^2 > \frac{5ga}{2} + 4ga$$

$u^2 > \frac{13ga}{2}$ නම් ඉවත්වීමෙන් පසු සිදුවන චලිතයේ දී අංශුව පාත්‍රය තුළට නොවැටේ.

04




II අවස්ථාව

ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ නම්

$$T_0 = \frac{\lambda \times 4a}{\ell} \quad —— ①$$

$$T_0 = 4mg \quad —— ②$$

① හා ② න් $\quad \frac{4\lambda a}{\ell} = 4mg$

$$\therefore \lambda = \frac{m\ell g}{a}$$

III අවස්ථාව

$T = \frac{\lambda x}{\ell}$, $x > 0$ විට

$$T = \frac{m\ell g}{a} \times \frac{x}{\ell} = \frac{mgx}{a}$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{mgx}{a} = m\ddot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{-g}{a}(x-a) \quad —— ③$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x-a) = 0, \; x > 0$$

$x = a + b\sin\omega t + c\cos\omega t$ —— ④ විසඳුමක් ලෙස දී ඇත.

$t = 0$ විට $x = 4a$ (II අවස්ථාව සලකා) හා $\dot{x} = 0$ නිසා

$4a = a + b\sin 0 + c\cos 0$

$\therefore c = 3a$

④, t විෂයෙන් අවකලනයෙන්

$\dot{x} = b\omega\cos\omega t - c\omega\sin\omega t$

$0 = b\omega\cos 0 - c\omega\sin 0$

$\therefore b = 0$ ($\because \omega \neq 0$ නිසා)

$\therefore$ විසඳුම $x = a + 3a\cos\omega t$ —— ⑤

අංශුව චලිතය ඇරඹි $t_1$ කාලයකට පසු එහි විස්ථාපනය $x = 0$ වේ නම්, ⑤ න්

$$0 = a + 3a\cos\omega t_1$$

$$\cos\omega t_1 = -\frac{1}{3}$$

$\cos(\pi - \omega t_1) = -\cos\omega t_1$ නිසා

$$\cos(\pi - \omega t_1) = \frac{1}{3}$$

$$\pi - \omega t_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

$t = t_1$ විට [illegible] P [illegible]

[illegible] $v_1$ නම්, $\dot{x} = -3a\omega \sin \omega t$ [illegible]

$$v_1 = -3a\omega \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$$
$$= -3a\omega \sqrt{1 - \frac{1}{9}}$$
$$= -2\sqrt{2}\, a\omega \text{ වේ.}$$

[illegible] – $\dot{x}$ හි දිශාව ↓ [illegible] $t = t_1$ විට ↑ [illegible]

[illegible] $h_1$ නම් $v^2 = u^2 + 2as$ ↑ [illegible]

$$0 = (-2\sqrt{2}a\omega)^2 - 2gh_1$$

$$h_1 = \frac{8a^2\omega^2}{2g} = \frac{8a^2}{2g} \times \frac{g}{a} \quad (\omega^2 = \frac{g}{a} \text{ නිසා})$$

$$h_1 = 4a$$

[illegible] $t_2$ නම් ↑ $v = u + at$ [illegible]

$0 = 2\sqrt{2}\,a\omega - gt_2$ වේ. එවිට $t_2 = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$

[illegible] $= 3a + a + 4a$
$= 8a$

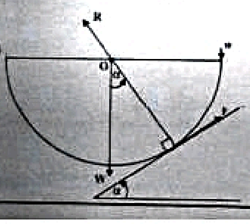
[illegible] $= t_1 + t_2$

$$= \frac{1}{\omega}\left(\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\right\}$$

සටහන –
[illegible] $v^2 = \omega^2\left[(3a)^2 - y^2\right]$ [illegible]

05. (a)




[illegible]

I. ලම්බක දිශාවට විභේදනයෙන්
$$R = (W + w)\cos\alpha \quad \text{—— (1)}$$

II. සමාන්තර දිශාවට විභේදනයෙන්
$$F = (W + w)\sin\alpha \quad \text{—— (2)}$$

O වටා [illegible] a නම්.

$$F \times a = w \times a$$
$$\therefore F = w \quad \text{—— (3)}$$

එවිට (3) න් $\quad w = (W + w)\sin\alpha$

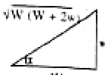
$$\sin\alpha = \frac{w}{W + w}$$

[illegible]

$\frac{F}{R} = \mu$ වේ.

(1) හා (2) න් $\mu = \tan\alpha$ වේ.

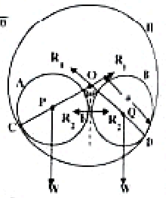
$$\therefore \mu = \frac{w}{\sqrt{W(W + 2w)}}$$




(b) A හා B [illegible]

$$2R_1 \cos\theta = 2W$$
$$R_1 = \frac{W}{\cos\theta}$$

මෙහි $P\hat{O}Q = 2\theta$ වේ.




A [illegible]

$$R_1 \sin\theta = R_2$$
$$R_2 = W\tan\theta$$

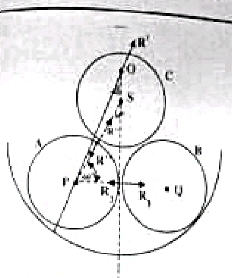
OC = a, PC = b නිසා OP = a - b, PE = b නිසා

$$OE = \sqrt{(a-b)^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - 2ab} = \sqrt{a(a - 2b)}$$

$$\therefore R_2 = W\frac{b}{\sqrt{a(a - 2b)}}$$








O යනු H [illegible]

A, B, C [illegible]

$$2R'\cos\theta = 3W$$

C [illegible]

$$2R''\cos 30 = W$$
$$R'' = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

A [illegible]

$$\rightarrow R'\sin\theta = R''\cos 60 + R_3$$

$$\frac{3W}{2\cos\theta}\sin\theta = \frac{W}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} + R_3$$

$$R_3 = \frac{3W}{2}\tan\theta - \frac{W}{2\sqrt{3}}$$

A හා B [illegible]
$R_3 > 0$ විය යුතුය.

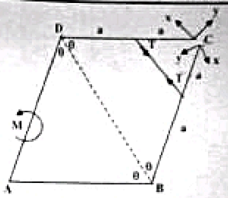
[illegible] $\frac{3W}{2}\tan\theta - \frac{W}{2\sqrt{3}} > 0$ විය යුතුය.

$\tan\theta > \frac{1}{3\sqrt{3}}$ විය යුතුය.

$$\frac{b}{\sqrt{a(a - 2b)}} > \frac{1}{3\sqrt{3}}$$
$$27b^2 > a^2 - 2ab$$
$$28b^2 > a^2 - 2ab + b^2$$
$$28b^2 > (a - b)^2$$
$$2\sqrt{7}\,b > a - b$$

$b(1 + 2\sqrt{7}) > a$ විය යුතුය.

06. (a) [illegible] C [illegible]
BD ට [illegible] X ද,
AC ට [illegible] Y ද,
[illegible]




BC හා DC [illegible] B හා D [illegible]

B ↺ $T \times a\sin\theta = X \times 2a\sin\theta - Y \times 2a\cos\theta$ —— (1)

D ↻ $T \times a\sin\theta = X \times 2a\sin\theta + Y \times 2a\cos\theta$ —— (2)

(1) + (2) න් $X = \frac{T}{2}$ [illegible]

(2) - (1) න් $Y = 0$ [illegible]

[illegible] ADC [illegible] A [illegible]

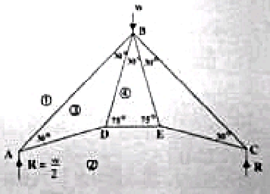
(A) $M + (X \times 4a\sin\theta) + (Y \times 4a\cos\theta) = T \times 3a\sin\theta$

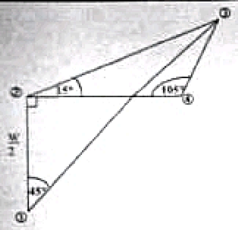
$$M + \frac{T}{2} \times 4a\sin\theta + 0 = 3Ta\sin\theta$$
$$M = Ta\sin\theta$$
$$T = \frac{M}{a\sin\theta}$$

(b) [illegible] B [illegible]

$\therefore R = \frac{W}{2}$ වේ.

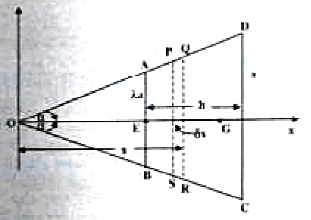
A [illegible] D [illegible]






| දණ්ඩ | ප්‍රත්‍යාබලය | විශාලත්වය |
|---|---|---|
| AD | ආතතිය | $\frac{W}{\sqrt{2}}$ |
| AB | තෙරපුම | W sin 75° |
| DE | ආතතිය | $\frac{W\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sin 75}$ |
| DB | ආතතිය | $\frac{W}{\sqrt{2}}$ |

07.




[illegible] x [illegible]
[illegible] α [illegible] y [illegible] x [illegible] δx [illegible] PQRS [illegible]

[illegible] $= \pi x^2 \tan^2\alpha\, \delta x\, \rho$

$\therefore$ [illegible] $M = \int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha} \pi\rho\tan^2\alpha\, x^2\, dx$

$= \pi\rho\tan^2\alpha\left(\frac{x^3}{3}\right)_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}$

$M = \frac{\pi\rho\tan^2\alpha}{3}\left[a^3\cot^3\alpha - \lambda^3 a^3\cot^3\alpha\right]$

$= \frac{\pi\rho\tan^2\alpha\cot^3\alpha\, a^3}{3}(1-\lambda^3)$

$M = \frac{1}{3}\pi\rho a^3\cot\alpha(1-\lambda^3)$

[illegible] h [illegible]

$h = a\cot\alpha - \lambda a\cot\alpha$ [illegible]

$\cot\alpha = \frac{h}{a(1-\lambda)}$

$\therefore M = \frac{1}{3}\pi a^3\rho\frac{h}{a(1-\lambda)}(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)$

$= \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2)$

[illegible] G [illegible] $G \equiv (\bar{x}, 0)$ [illegible]
[illegible]

$$\bar{x} = \frac{\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}\pi\rho\tan^2\alpha\, x^2 . x\, dx}{\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}\pi\rho\tan^2\alpha\, x^2 . dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\pi\rho\tan^2\alpha\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}x^3 . dx}{\pi\rho\tan^2\alpha\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}x^2 . dx}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha} \Big/ \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{[a^4\cot^4\alpha - \lambda^4 a^4\cot^4\alpha]}{[a^3\cot^3\alpha - \lambda^3 a^3\cot^3\alpha]}$$

$$= \frac{3a^4\cot^4\alpha}{4a^3\cot^3\alpha}\frac{(1-\lambda^4)}{(1-\lambda^3)}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{4}a\cot\alpha\frac{(1-\lambda^4)}{(1-\lambda^3)}$$

[illegible]

$EG = \bar{x} - \lambda a\cot\alpha$

$= \frac{3}{4}a\cot\alpha\frac{(1-\lambda^4)}{(1-\lambda^3)} - \lambda a\cot\alpha$

$= \frac{1}{4}\frac{a\cot\alpha}{(1-\lambda^3)}[3(1-\lambda^4) - 4\lambda(1-\lambda^3)]$

$= \frac{h}{4a(1-\lambda)(1-\lambda^3)}[3(1-\lambda)(1+\lambda)(1+\lambda^2) - 4\lambda(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)]$

$= \frac{h(1-\lambda)}{4(1-\lambda)(1-\lambda^3)}[3+3\lambda+3\lambda^2+3\lambda^3-4\lambda-4\lambda^2-4\lambda^3]$

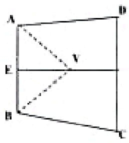
$= \frac{h}{4(1-\lambda^3)}[3-\lambda-\lambda^2-\lambda^3]$

$= \frac{h}{4}\frac{(1-\lambda)(3+2\lambda+\lambda^2)}{(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)}$

$EG = \frac{h(3+2\lambda+\lambda^2)}{4(1+\lambda+\lambda^2)}$

[illegible] $\lambda \to 0$ [illegible]

[illegible] $M = \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho$ [illegible] $OG = \frac{3}{4}h$ [illegible]




| [illegible] | ස්කන්ධය | [illegible] E [illegible] |
|---|---|---|
| ABCD [illegible] | $m_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2)$ | $\frac{h}{4}\frac{(3+2\lambda+\lambda^2)}{(1+\lambda+\lambda^2)}$ |
| ABV [illegible] | $m_2 = \frac{1}{3}\pi a^2\frac{h}{2}\rho$ | $\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)$ |
| J [illegible] | $m_1 - m_2$ | $EG_1$ |

[illegible]
ABV [illegible] J [illegible] $G_1$ [illegible]

$$EG_1 = \frac{\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2) . \frac{h}{4}\frac{(3+2\lambda+\lambda^2)}{(1+\lambda+\lambda^2)} - \frac{1}{3}\pi a^2\frac{h}{2}\rho\times\frac{h}{8}}{\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2) - \frac{1}{3}\pi a^2\frac{h}{2}\rho\lambda^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}h(3+2\lambda+\lambda^2) - \frac{\lambda^2 h}{16}}{1+\lambda+\lambda^2-\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$= \frac{\frac{12h+8\lambda h+4\lambda^2 h-\lambda^2 h}{16}}{\frac{2+2\lambda+2\lambda^2-\lambda^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3\lambda^2 h+8\lambda h+12h}{2+2\lambda+\lambda^2}\right) = \frac{h(3\lambda^2+8\lambda+12)}{8(\lambda^2+2\lambda+2)}$$

$G_1 = V$ [illegible]

[illegible] $\frac{h(3\lambda^2+8\lambda+12)}{8(\lambda^2+2\lambda+2)} = \frac{h}{2}$ [illegible]

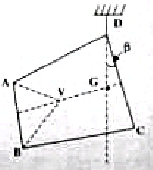
[illegible] $3\lambda^2+8\lambda+12 = 4\lambda^2+8\lambda+8$ [illegible]
[illegible] $\lambda^2 = 4$
$\lambda = 2$ [illegible]

[illegible] $0 < \lambda < 1$ [illegible]
[illegible] $G_1$ [illegible] V [illegible]
[illegible] β [illegible]

$$\tan\beta = \frac{a}{h - EG_1} = \frac{a}{h - \frac{h}{8}\frac{(3\lambda^2+8\lambda+12)}{(\lambda^2+2\lambda+2)}}$$

$$= \frac{8a(\lambda^2+2\lambda+2)}{h(8\lambda^2+16\lambda+16-3\lambda^2-8\lambda-12)}$$

$$= \frac{8a(\lambda^2+2\lambda+2)}{h(5\lambda^2+8\lambda+4)}$$



08. (a) I. A හා B සිද්ධි ස්වායත්ත වේ නම්,
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ වෙයි.

II. A හා B සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ නම්,
$A \cap B = \emptyset$ , එනම් $P(A \cap B) = 0$ වෙයි.

III. A හා B සිද්ධි නිරවශේෂ වේ නම්,
$A \cup B = \Omega$ (නියැදි අවකාශය)
එනම් $P(A \cup B) = 1$ වෙයි.

$A \cap B$ හා $A \cap B'$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධීන් වේ.

$P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] = P(A \cap B) + P(A \cap B')$ — ①

එසේම $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

$\therefore P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')]$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$ — ②

① හා ② න්

$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')]$

$P(A) = \frac{1}{2}$ , $P(B) = \frac{1}{3}$ , $P(A \cap B') = \frac{1}{2}$

② ට අනුව $\frac{1}{2} = P(A \cap B) + \frac{1}{2}$

$\therefore P(A \cap B) = 0$

② ට අනුව $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$ බව ලැබේ.

$\therefore \frac{1}{3} = 0 + P(A' \cap B)$

$\therefore P(A' \cap B) = \underline{\frac{1}{3}}$

$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$ (ඩි මෝගන් නියම)

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - [\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0]$

$= \underline{\frac{1}{6}}$

(b) B සිද්ධිය සිදුව ඇතැයි දී ඇතිවිට A සිදුවීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ($\because P(B) > 0$ බැවින්)

[illegible]

X : [illegible]

Y : [illegible]

Z : [illegible]

Z' : [illegible]

$P(Z) = \frac{19}{28}$ , $\therefore P(Z') = \frac{9}{28}$ ($\because Z \cup Z' = \Omega$)

$P(Z | Y) = \frac{3}{4}$ $\therefore P(Z' | Y) = \frac{1}{4}$

$P(Z' | X) = 2(Z' | Y)$ බව දී ඇත

$\therefore P(Z' | X) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

I [illegible] $P(Z')$

$P(Z') = P(X \cap Z') + P(Y \cap Z')$

$= P(X) \times P(Z' | X) + P(Y) P(Z' | Y)$

$= (x \times \frac{1}{2}) + (1 - x)\frac{1}{4}$

[illegible] $P(Z') = \frac{9}{28}$ බැවින්, x යනු $P(X)$ නම් $P(Y) = 1 - x$ වේ.

$\frac{9}{28} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

$\frac{9}{28} - \frac{1}{4} = \frac{2}{28}x$

$= \frac{1}{4}x$

$x = \frac{2}{7}$

$\therefore$ [illegible]

$P(X)$ ; $P(X) = \frac{2}{7}$ වේ.

[illegible] $P(Y | Z')$ [illegible]

$P(Y|Z') = \frac{P(Y \cap Z')}{P(Z')}$ [illegible]

$P(Z'|Y) = \frac{P(Y \cap Z')}{P(Y)}$ [illegible]

$\therefore P(Y|Z') = \frac{P(Z'|Y)\,P(Y)}{P(Z')}$

$= \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{7}\right)}{\frac{9}{28}}$

$= \underline{\frac{5}{9}}$





09. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ දත්තයන්ගේ මධ්‍යන්‍යය $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$y_i = ax_i + b$ පරිණාමනයට අනුව

$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)$

$= \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b$

$= a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1$

$= an\bar{x} + bn$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ දත්තයන්ගේ මධ්‍යන්‍යය $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ බැවින්

$\bar{y} = \frac{1}{n}[an\bar{x} + bn]$

$\bar{y} = a\bar{x} + b$ —— ①

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ දත්තයන්ගේ සම්මත අපගමනය

$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[ax_i + b - (a\bar{x} + b)^2]}$

$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - a\bar{x} - b)^2}$

$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i - \bar{x})^2}$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ දත්තයන්ගේ සම්මත අපගමනය

$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ බැවින්

$\therefore S_y = \sqrt{a^2}S_x$

$S_y = |a|S_x$ —— ②

$x_i$ යනු $i$ වන [illegible] $y_i$ යනු [illegible]

$y_i = ax_i + b$ [illegible]

$40 = 40a + b$ — ③

① න් $50 = am + b$ — ④ ($\because \bar{x} = m$ හා $\bar{y} = 50$ බැවින්)

② න් $15 = 12|a|$ — ⑤

⑤ න් $|a| = \frac{5}{4}$

④ - ③ න් $10 = a(m - 40)$

$a = \pm\frac{5}{4}$ බැවින්

$m = 48$ හෝ $32$ වේ.

[illegible]

$56 = 61a_1 + b_1$ —— ⑥

$50 = 53a_1 + b_1$ —— ⑦

$15 = |a_1| S$ —— ⑧

⑥ - ⑦ න් $6 = 8a_1$

$a_1 = \frac{3}{4}$

$\therefore$ ⑧ න් $S = 20$

[illegible]
[illegible] n [illegible]

[illegible] $= 53\,n$ වේ.

[illegible]

[illegible] $= n \times 0.1\% = \frac{n}{1000}$

[illegible]

[illegible] $= 53\,n + \frac{n}{1000}(68 - 65)$

$= 53\,n + \frac{3n}{1000}$

$= \frac{53003\,n}{1000}$

$\therefore$ [illegible] $= \frac{53003\,n}{1000} / n$

$= \underline{53.003}$

* * * *



Past Papers Wiki - Most Extensive Wikipedia of Past Papers!