ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය I உயர் கணிதம் I Higher Mathematics I	11 T I	පැය තුනයි மூன்று மணித்தியாலம் Three hours

சுட்டெண் : | | | | | | | |

அறிவுறுத்தல்கள் :

- ✳ இவ்வினாத்தாள் **பகுதி A** (வினாக்கள் 1 - 10), **பகுதி B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது.
- ✳ **பகுதி A:**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் உமது விடைகளை எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- ✳ **பகுதி B:**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் உமது விடைகளை எழுதுக.
- ✳ ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** ஆனது **பகுதி B** யிற்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- ✳ வினாத்தாளின் **பகுதி B** யை **மாத்திரம்** மண்டபத்திற்கு வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகரின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் I

பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	
	சதவீதம்	

வினாத்தாள் I	
வினாத்தாள் II	
மொத்தம்	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

இறுதிப் புள்ளிகள்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்		
பரிசீலித்தவர்:	1	
	2	
மேற்பார்வை செய்தவர்:		

Department of Examinations, Sri Lanka

பகுதி A

1. காரணிப்படுத்துக: $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$.

2. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ எனின், xRy இனால் எல்லா நேர் மெய்யெண்களினதும் தொடை $\mathbb{R}^+$ மீது ஒரு தொடர்பு R வரையறுக்கப்படுகின்றது. R ஆனது $\mathbb{R}^+$ மீது ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பெனக் காட்டுக. π இன் சமவன்மை வகுப்பைக் காண்க.

Department of Examinations, Sri Lanka

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

0067

3. $a \neq 0$ உடன் $a, b \in \mathbb{R}^{+}$ எனவும் $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) = ax + b$ எனவும் கொள்வோம். f ஆனது ஒன்றுக்கொன்றானதும் இன் மேலானதும் ஆகும் எனக் காட்டுக.

$x \in \mathbb{R}$ இற்கு $g(x) = 2x + 1$ எனக் கொள்வோம். $f \circ g = g \circ f$ எனின், $a = b + 1$ எனக் காட்டுக.

4. $\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \\ 1 & \cos^4 \alpha & \sin^4 \alpha \\ 1 & \sec^2 \alpha & \tan^2 \alpha \end{vmatrix} = 2 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$ எனக் காட்டுக.

Department of Examinations, Sri Lanka

Department of Examinations, Sri Lanka

5. நீள்வளையம் $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ இற்குப் புள்ளி (x_1, y_1) இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ எனக் காட்டுக.

துணை வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ இற்குப் புள்ளி (x_1, y_2) இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக. $x_1 \neq 0$ எனவும் $y_1 \neq 0$ எனவும் தரப்படும்போது இவ்விரு தொடலிகளும் நீள்வளையத்தின் பேரியச்சு மீது உள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $a>0$ எனவும் $b>0$ எனவும் $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ஆனது

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+a|}{x+a}, & x>-a \text{ எனின்,}\\ 2x+1, & -a\le x\le b \text{ எனின்,}\\ 2+\ln(x+1-b), & x>b \text{ எனின்,}\end{cases}$$

இனால் வரையறுக்கப்படும் சார்பு எனவும் கொள்வோம். $\mathbb{R}$ மீது f தொடர்ச்சியானதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Department of Examinations, Sri Lanka

Department of Examinations, Sri Lanka

7. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ஆனது $x\in\mathbb{R}$ இற்கு $f(x)=x|x|$ இனால் வரையறுக்கப்படும் சார்பெனக் கொள்வோம். $x=0$ இல் $f(x)$ வகையிடப்படத்தக்கதெனக் காட்டி, எல்லா $x\in\mathbb{R}$ இற்கும் $f'(x)$ ஐ எழுதுக.

$x=0$ இல் $f'(x)$ **வகையிடப்படத்தக்கதன்று** எனக் காட்டுக.

8. $x=1$ ஆக இருக்கும்போது $y=2$ என்னும் நிபந்தனைக்கமைய வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\sqrt{x^3+3}$ ஐத் தீர்க்க.

Department of Examinations, Sri Lanka

Department of Examinations, Sri Lanka

9. $a \in \mathbb{R}$ எனவும் f ஆனது $[0, 2a]$ மீது வரையறுக்கப்படும் $x \in [0, a]$ இற்கு $f(x+a) = f(x)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு மெய்ப் பெறுமானமுள்ள தொடர் சார்பு எனவும் கொள்க. $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$ எனக் காட்டுக.

10. முனைவாள்கூறுகள் $r = 2\cos\theta$, $r = 2\sin\theta$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைந்து, இவ்விரு வளையிகளினாலும் வரைப்புற்ற பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

Department of Examinations, Sri Lanka

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

பகுதி B

✻ ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (*a*) A, B, C, D ஆகியன ஓர் அகிலத் தொடை S இன் தொடைப்பிரிவுகளெனக் கொள்வோம். நீர் பயன்படுத்தும் தொடை அட்சரகணித விதிகளைத் தெளிவாகக் கூறிப் பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் நிறுவுக:

(i) $(A \cap B \cap C \cap D)' = (A' \cup B' \cup C' \cup D')$

(ii) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$; இங்கு $A - B$ ஆனது $A - B = A \cap B'$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது.

(*b*) 600 மாணவர்களிடையே கிறிக்கெற்று, கைப்பந்தாட்டம், உதைபந்தாட்டம் ஆகியவற்றில் அவர்கள் விரும்பும் விளையாட்டுகளைத் துணிவதற்காக ஒரு கணிப்பீடு நடத்தப்பட்டது. இக்கணிப்பீட்டிலிருந்து பின்வரும் தரவுகள் சேர்க்கப்பட்டன.

206 கிறிக்கெற்றை விரும்புகின்றனர், 141 கைப்பந்தாட்டத்தை விரும்புகின்றனர், 184 உதைபந்தாட்டத்தை விரும்புகின்றனர். அத்துடன் 42 கிறிக்கெற்றையும் கைப்பந்தாட்டத்தையும் விரும்புகின்றனர், 65 கிறிக்கெற்றையும் உதைபந்தாட்டத்தையும் விரும்புகின்றனர். 57 கைப்பந்தாட்டத்தையும் உதைபந்தாட்டத்தையும் விரும்புகின்றனர், 19 எல்லா மூன்று விளையாட்டுகளையும் விரும்புகின்றனர்.

கணிப்பீடு மேற்கொள்ளப்பட்ட விளையாட்டுகளில்

(i) உயர்ந்தபட்சம் ஒரு விளையாட்டை,

(ii) செப்பமாக இரு விளையாட்டுகளை,

(iii) உதைப்பந்தாட்டத்தை மாத்திரம்

விரும்பும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

எத்தனை மாணவர்கள் இவ்விளையாட்டுகளில் எதனையும் விரும்புவதில்லை என்பதையும் காண்க.

12. (*a*) a, b, c என்னும் மூன்று நேர் மெய்யெண்களுக்குக் கூட்டலிடை – பெருக்கலிடைச் சமமின்மை $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ இனால் தரப்படுகின்றது.

(i) இங்கு சமம் எப்போது செல்லுபடியாகும் ?

(ii) $a^3 + b^3 = 3ab$ ஆக இருக்குமாறு a, b ஆகியவற்றின் எல்லாச் சோடிகளையும் காண்க.

(iii) $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$ எனக் காட்டுக.

(iv) $a > b$ ஆக இருக்கும்போது $a + \dfrac{1}{b(a-b)}$ இன் குறைந்தபட்சப் பெறுமானம் யாது ?

(*b*) உருமாற்றம் $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ஆனது xy-தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளை $x'y'$-தளத்திற்கு உருமாற்றுகின்றது.

$ad - bc \neq 0$ ஆக இருப்பின், xy-தளத்தில் உள்ள சமாந்தரக் கோடுகள் இவ்வுருமாற்றத்தினால் $x'y'$-தளத்தில் உள்ள சமாந்தரக் கோடுகளின் மேல் படமாக்கப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

Department of Examinations, Sri Lanka

13. ஒரு நேர் நிறையெண் சுட்டிக்குத் த **மோய்வரின் தேற்றத்தைக்** கூறி நிறுவுக.

$\omega = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ எனக் கொள்வோம். $k = 0, 1, 2, \ldots$ இற்கு ω^k ஆனது சமன்பாடு $z^7 = 1$ இன் ஒரு மூலமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $z^7 = 1$ இன் ஏழு மூலங்களை எழுதுக.

மேலும் $k=0,1,2,\ldots,6$ இற்கு $\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$ எனக் காட்டி, $k=1,2,3$ இற்கு $\omega^k + \omega^{7-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{7}$ என்பதை உய்த்தறிக.

$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^6 = 0$ என மேலும் காட்டி, $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ என்பதை உய்த்தறிக.

14. (*a*) C_1, C_2 ஆகியன முறையே $y = 2x^2$, $y = x^2 + 1$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் வளையிகளெனக் கொள்வோம். அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காட்டி, C_1, C_2 ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

C_1, C_2 ஆகிய இரு வளையிகளினாலும் வரைப்புற்ற பிரதேசம் D இன் பரப்பளவைக் காண்க.

x-அச்சைப் பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகப் பிரதேசம் D ஐச் சுழற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவையும் காண்க.

(*b*) ஒரு வளையிக் குடும்பம் வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y - 5}{2x + 7y - 9}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது.

$x = X + a$ எனவும் $y = Y + b$ எனவும் பிரதியிடுவதன் மூலம் தரப்பட்ட வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 3Y}{2X + 7Y}$ ஆக உருமாற்றப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு a, b ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

$Y = vX$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, மேலே தரப்பட்ட வளையிக் குடும்பத்தின் தெக்காட்டின் வகைக்குறிப்பைப் பெறுக.

15. (*a*) $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ எனின், $n \geq 2$ இற்கு $I_n = x^{n-1}\sqrt{(a^2 + x^2)} - (n-1)a^2 I_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{5 + x^2}} = \frac{168}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3}$ எனக் காட்டுக.

(*b*) $y_n(x)$ ஆனது $y(x) = \ln(\sec x)$ இன் n ஆம் பெறுதியைக் குறிக்கின்றதெனக் கொள்வோம். $y_3 = 2y_2y_1$ எனவும் $y_5 = 2y_4y_1 + 6y_3y_2$ எனவும் காட்டுக.

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ இற்கு $y_n(0)$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, x இன் x^6 உம் உயர் வலுக்களும் புறக்கணிக்கப்படுமெனின், $y(x)$ இற்கு மக்குளோரின் தொடர் விரியை எழுதுக.

அண்ணளவுத் தொடர்பு $\ln 2 = \frac{\pi^2}{16}\left(1 + \frac{\pi^2}{96}\right)$ ஐ உய்த்தறிக.

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

16. அதிபரவளைவு $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ இனதும் நேர்கோடு $y=mx+c$ இனதும் வெட்டுப் புள்ளிகளின் x-ஆள்கூறுகள் சமன்பாடு $(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(b^2+c^2)=0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன எனக் காட்டுக; இங்கு a, b, m, c ஆகியன பூச்சியமல்லாத மெய்ம் மாறிலிகளாகும்.

கோடு $y=mx+c$ அதிபரவளைவுக்கு ஒரு தொடலியெனின், $a^2m^2=b^2+c^2$ என்பதை உயத்தறிக.

புள்ளி $(1, 4)$ இனூடாகச் செல்லும், அதிபரவளைவு $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ இற்குரிய இரு தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

அதிபரவளைவு மீது இவ்விரு தொடலிகளும் தொடுகையுறும் இரு புள்ளிகளினதும் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

17. (*a*) $x\in\mathbb{R}$ இற்கு $f(x)=4\sin^2x+4\cos x-1$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $f(x)$ ஐ வடிவம் $a-(b\cos x+c)^2$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b, c ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

இதிலிருந்து, $f(x)$ இன் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் குறைந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் கண்டு, அவை பெறப்படும் புள்ளிகளின் x - ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

(ii) சமன்பாடு $f(x)=0$ ஐத் தீர்க்க.

(iii) $0\le x\le\pi$ இற்கு $y=f(x)$ இன் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

(*b*) பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள e^{x^2} இன் பெறுமானங்களுடன் சிம்சனின் நெறியைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ இற்குரிய ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.0
e^{x^2}	1	1.064	1.284	1.755	2.718

$\int_0^1\left(2x+3e^{x^2}\right)dx$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

* * *

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

0062

AL/2017/11/T-II

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

சுட்டெண் :

அறிவுறுத்தல்கள் :

* இவ்வினாத்தாள் **பகுதி A** (வினாக்கள் 1 - 10), **பகுதி B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது.
* **பகுதி A**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் உமது விடைகளை எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* **பகுதி B**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் உமது விடைகளை எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** ஆனது **பகுதி B** யிற்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் **பகுதி B** யை **மாத்திரம்** மண்டபத்திற்கு வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.
* புள்ளிவிவர அட்டவணைகள் வழங்கப்படும்.
* g ஆனது ஈர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகரின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் II

பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	
	சதவீதம்	

வினாத்தாள் I	
வினாத்தாள் II	
மொத்தம்	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

இறுதிப் புள்ளிகள்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்: 1	
பரிசீலித்தவர்: 2	
மேற்பார்வை செய்தவர்:	

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

Department of Examinations, Sri Lanka

பகுதி A

1. ஓர் உற்பத்தி O பற்றி A, B, C என்னும் மூன்று புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, 2\mathbf{k}$ ஆகும். காவிப் பெருக்கம் $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ஐக் கருதுவதன் மூலம்

   (i) முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $\sqrt{6}$ சதுர அலகுகள் எனவும்

   (ii) ABC இன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் அலகுக் காவி $\dfrac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ எனவும்

   காட்டுக.

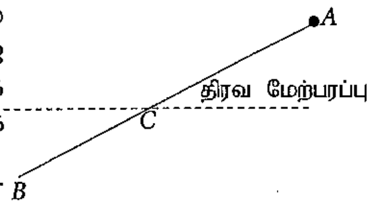
2. பருமன் 15 N ஐ உடைய ஒரு விசை $\mathbf{F}$ ஆனது தானக் காவி $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ உள்ள புள்ளியில் காவி $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ இன் திசையில் தாக்குகின்றது. உற்பத்தி O பற்றி $\mathbf{F}$ இன் திருப்பக் காவி $10\mathbf{i}+20\mathbf{j}$ N m எனின், மீற்றரில் அளக்கப்படும் a, b ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

0062

3. நீளம் $2a$ ஐயும் அடர்த்தி ρ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB ஆனது முனை A இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, நீளம் $2b$ ஐ உடைய பகுதி BC ஆனது அடர்த்தி σ ஐ உடைய ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு அமிழ்த்தப்பட்டு ஒரு சாய்ந்த தானத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. $\dfrac{\rho}{\sigma} = \dfrac{2ab - b^2}{a^2 + 2ab - b^2}$ எனக் காட்டுக.



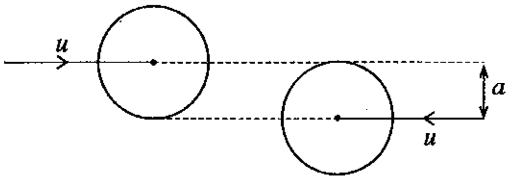
4. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது நேரம் t இல் ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O தொடர்பாகத் தானக் காவி $\mathbf{r}$ ஐ உடையது. P மீது தாக்கும் விசை $\mathbf{F}$ ஆனது O ஐ நோக்கி வழிப்படுத்தப்பட்டுள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் அதன் கோண உந்தக் காவி $\mathbf{h}$ மாறாமல் இருக்குமெனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{v}$ ஆனது வேகமாகும்.

துணிக்கையின் பாதை $\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} =$ மாறிலி என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படத்தக்க சமன்பாடு உள்ள ஒரு தளத்தின் மீது இருக்கின்றது எனவும் காட்டுக.

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

[பக். 4 ஐப் பார்க்க

5. ஒவ்வொன்றும் ஆரை a ஐ உடைய இரு ஒப்பமான சம கோளங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தில் இடைத்தூரம் a இல் உள்ள இரு சமாந்தரக் கோடுகள் வழியே ஒரே கதி u உடன் ஒன்றையொன்று நோக்கி எதிர்த் திசைகளில் இயங்குகின்றன. அவற்றுக்கிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ ஆகும். அவற்றின் மொத்தலிற்குப் பின்னர் ஒவ்வொரு கோளமும் அதன் தொடக்க இயக்கத் திசைக்குச் செங்குத்தாகக் கதி $\frac{u}{\sqrt{3}}$ உடன் இயங்குகின்றதெனக் காட்டுக.



6. திணிவு m ஐயும் நீளம் $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஆனது ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் நாப்பத்தில் தொங்கும்போது அதற்கு ஒரு கோணக் கதி ω கொடுக்கப்படுகின்றது. $\omega^2 \geq \frac{3g}{a}$ எனின், முனை B ஒரு முழுமையான வட்டத்தை வரையுமெனக் காட்டுக.

Department of Examinations, Sri Lanka

7. X ஆனது "நான்கு கோடாத நாணயங்கள் மேலே எறியப்படும்போது பெறப்படும் தலைகளின் எண்ணிக்கை" என்னும் எழுமாற்று மாறியெனக் கொள்வோம். X இன் எதிர்வைக் கண்டு, X இன் மாறற்றிறன் 1 எனக் காட்டுக.

8. ஒரு பொறியினால் உற்பத்திசெய்யப்படும் உருப்படிகளில் 10% ஆனவை குறைபாடுள்ளவை. உற்பத்தியிலிருந்து எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட 5 உருப்படிகளில் உயர்ந்தபட்சம் 2 உருப்படிகள் குறைபாடுள்ளனவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. ஓர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} a(2-x) & , \ 1 \le x \le 2 \quad \text{எனின்,} \\ 0 & , \ \text{வேறுவிதமாக} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகிறது.

(i) $a = 2$, (ii) இடை $\mu = \frac{4}{3}$, (iii) $P(1 \le X \le 1.5) = 0.75$ எனக் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. ஒரு தொடர் எழுமாற்றி மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & , \ x \ge 0 \quad \text{எனின்,} \\ 0 & , \ \text{வேறுவிதமாக} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

$P(X \le x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $P(5 < X \le 10)$ ஐக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Department of Examinations, Sri Lanka

Department of Examinations, Sri Lanka

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

பகுதி B

* **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ என்னும் மூன்று விசைகள் கீழே விதித்துள்ளவாறு முறையே $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ என்னும் தானக் காவிகளை உடைய புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன.

தாக்கப் புள்ளி	விசை
$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$	$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
$\mathbf{r}_2 = -3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$	$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_3 = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$	$\mathbf{F}_3 = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

உற்பத்தி O இல் இவ்விசைத் தொகுதி ஒடுக்கப்படும்போது ஒரு தனி விசை $\mathbf{R}$ உடன் திருப்பக் காவி $\mathbf{G} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ ஆகவுள்ள ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளது எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, தொகுதி ஒரு தனி விளையுள் விசையாக ஒடுங்குகின்றது எனக் காட்டுக.

$\mathbf{R}$ இன் பருமனைக் கண்டு, விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டிற்கு ஒரு காவிச் சமன்பாட்டை வடிவம் $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{R}$ இற் பெறுக; இங்கு λ ஆனது ஒரு பரமானமும் $\mathbf{a}$ ஆனது துணியப்பட வேண்டிய ஒரு புள்ளியின் தானக் காவியும் ஆகும்.

12. மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஓர் அரைவட்ட அடர் ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில், அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் விட்டம் திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பின் மீதும் இருக்குமாறு, அமிழ்த்தப்படுகின்றது. தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, அடர் மீது உள்ள திரவ உதைப்பைக் கண்டு, அடரின் அமுக்க மையம் O இலிருந்து ஆழம் $\dfrac{3\pi}{16}a$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக.

மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய அரைவட்ட வடிவமுள்ள ஒரு கதவு ஒரு தொட்டியின் நிலைகுத்துப் பக்கத்தில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. கதவு கிடையான விட்டம் AB வழியே ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, AB இற்குக் கீழே உள்ளது. அடர்த்தி ρ ஐ உடைய ஓர் ஏகவினத் திரவம் தொட்டியில் மட்டம் AB வரைக்கும் இடப்படுகின்றது. திரவம் தொட்டிக்குள்ளேயே இருக்குமாறு கதவை மூடிவைப்பதற்கு அதற்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க.

13. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது தொடக்கக் கதி u உடன் கிடையாக எறியப்படுகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கான தடை $\lambda m v^{\frac{3}{2}}$ ஆகும்; இங்கு λ ஆனது ஒரு நேர் மாறிலியும் v ஆனது நேரம் t இல் துணிக்கையின் கதியும் ஆகும். $\dfrac{dv}{dt} = -\lambda v^{\frac{3}{2}}$ எனக் காட்டி, **இதிலிருந்து,** தொடர்பு $v = \dfrac{4u}{(2 + \lambda\sqrt{u}\,t)^2}$ ஐப் பெறுக.

கதியை u இலிருந்து $\dfrac{u}{4}$ வரைக்கும் குறைப்பதற்குத் துணிக்கை எடுக்கும் நேரம் $\dfrac{2}{\lambda\sqrt{u}}$ என மேலும் காட்டி, இந்நேர ஆயிடையில் துணிக்கை செல்லும் தூரத்தைக் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

Department of Examinations, Sri Lanka

14. ஒரே ஆரையும் ஒரே திணிவையும் முறையே A, B என்னும் மையங்களையும் உடைய P, Q என்னும் இரு சிறிய ஒப்பமான கோளங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது ஒன்றையொன்று நோக்கி இயங்குகின்றன. அவை மோதுவதற்குச் சற்று முன்னர் P இன் வேகம் $\mathbf{u}$ ஆனது $\overrightarrow{AB}$ உடன் ஒரு கூர்ங்கோணம் θ ஐ ஆக்கிக்கொண்டும் Q இன் வேகம் $\mathbf{v}$ ஆனது $\overrightarrow{BA}$ வழியேயும் உள்ளன. இரு கோளங்களுக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும்.

மொத்தலுக்குச் சற்றுப் பின்னர் மையமிணை கோடு AB வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் P இன் வேகத்தின் கூறுகளைக் கண்க.

$u < \left(\frac{1-e}{1+e}\right)v$ எனத் தரப்படும்போது கோளம் Q ஆனது கதி $(1-e)\frac{v}{2} - \frac{(1+e)}{2}u\cos\theta$ உடன் முன்னர் போன்று அதே திசையில் தொடர்ந்து இயங்குகின்றது எனக் காட்டுக; இங்கு $v = |\mathbf{v}|, \ u = |\mathbf{u}|$.

மேலும், $u\cos\theta << v$ எனின், Q இல் எஞ்சியிருக்கும் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி அதன் தொடக்கப் பெறுமானத்தின் பின்னம் $\frac{1}{4}(1-e)^2$ எனக் காட்டுக.

15. திணிவு M ஐயும் ஆரை r ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்மக் கோளம் கிடையுடன் சாய்வு α இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த கரடான தளத்தின் மீது ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. கோளத்திற்கும் தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும்.

(i) $\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$ எனின், கோளம் தளத்தில் கீழ்நோக்கி உருளும் அதே வேளை அதன் மையம் $a = \frac{5}{7}g\sin\alpha$ இனால் தரப்படும் ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் a ஐக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.

(ii) $\mu < \frac{2}{7}\tan\alpha$ எனின், கோளம் தளத்தில் கீழ்நோக்கி வழுக்கிச் செல்லும் அதே வேளை அதன் மையத்தின் ஆர்முடுகல் a இலும் கூடியதெனக் காட்டுக.

(iii) $\mu = \frac{2}{7}\tan\alpha$ ஆகவும் தொடக்கத்தில் கோளம் சுழலாமல் அதன் மையத்திற்குத் தளத்தில் கீழ்நோக்கி ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோடு வழியே ஒரு வேகம் u கொடுக்கப்பட்டும் இருப்பின், அவ்வேகம் மாறாமல் இருக்குமெனக் காட்டுக.
[திணிவு M ஐயும் ஆரை r ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்மக் கோளத்தின் ஒரு விட்டத்தைப் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{2}{5}Mr^2$ எனக் கொள்ளலாம்.]

16. (a) ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி X இற்கு இடை $E(X) = \mu$ ஐ வரையறுத்து, X இன் மாறற்திறனிற்குச் சூத்திரம் $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$ ஐப் பெறுக.

(b) ஒரு பின்னக எழுமாற்றி மாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் பின்வருமாறு:

x	1	2	4	5
$P(X=x)$	p	q	q	p

$p = \frac{1}{12}$ எனத் தரப்படும்போது q இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$E(X) = 3$ எனக் காட்டி, $\text{Var}(X)$ ஐக் காண்க.

எழுமாற்று மாறி Y ஆனது $Y = X_1 + X_2$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றது; இங்கு X_1, X_2 ஆகியன X இன் இரு சாரா நோக்கல்கள் ஆகும். $P(Y=6) = \frac{13}{36}$ எனக் காட்டி, Y இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைப் பெறுக.

$E(Y), \text{Var}(Y)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$E(Y) = 2E(X)$ ஐயும் $\text{Var}(Y) = 2\text{Var}(X)$ ஐயும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

17. (a) ஒரு தொடர் எழுமாற்றி மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad \text{வேறு விதமாக} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

(i) $k = 6$ எனக் காட்டுக.

(ii) $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ ஐக் காண்க.

(iii) $E(X)$ ஐயும் $\mathrm{Var}(X)$ ஐயும் காண்க.

(b) தேயிலைப் பைகளின் நிறைகள் இடை 200 g உடன் செவ்வனாகப் பரம்பியுள்ளன. எல்லாத் தேயிலைப் பைகளினதும் செப்பமாக 60% இன் நிறைகள் 190 g இற்கும் 210 g இற்குமிடையே உள்ளன எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) தேயிலைப் பைகளின் நிறைகளின் நியம விலகலைக் காண்க.

(ii) ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த தேயிலைப் பையின் நிறை 180 g இற்கும் 200 g இற்குமிடையே இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) நான்கு தேயிலைப் பைகள் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இப்பைகளில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றின் நிறை 210 g இற்கு மேற்பட்டதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

* * *

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka