සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022(2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022(2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022(2023)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය	-	මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம்	-	10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time	-	10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

* இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் **1 - 10**), பகுதி **B** (வினாக்கள் **11 - 17**) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
* பகுதி **A :**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* பகுதி **B :**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் **பகுதி B ஐ மாத்திரம்** பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்		
பரிசீலித்தவர்:	1	
	2	
மேற்பார்வை செய்தவர்		

பகுதி A

1. காரணிப்படுத்துக: $(bc + ca + ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$.

2. எல்லா நிறைவெண்களினதும் தொடையாகிய $\mathbb{Z}$ மீது ஒரு தொடர்பு R என்பது $5a - 9b$ ஆனது 4 இனால் வகுபடத்தக்கதெனின், aRb இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்வோம். R ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பெனக் காட்டி, 0 இன் சமவன்மை வகுப்பை எழுதுக.

0076

3. $x \geq 1$ இற்கு $f(x) = x^2 - 2x - 3$ எனக் கொள்வோம். f ஆனது ஒன்றுக்கொன்றானது எனவும் $[-4, \infty)$ இன் மேலுள்ளது எனவும் காட்டுக.

$x > -4$ இற்கு $g(x) = \sqrt{4+x}$ எனக் கொள்வோம். சேர்த்திச் சார்பு $f \circ g$ இன் வீச்சைக் காண்க.

4. a, b, c ஆகியன பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்களெனக் கொள்வோம்.

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$$ எனக் காட்டுக.

5. எல்லா $t \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x = t^2,\ y = t^2 - 3t$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி C வரையறுக்கப்படுகின்றது. C இற்குப் புள்ளி $(4, 0)$ இல் இரு தொடலிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, இவ்விரு தொடலிகளுக்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $a, b \in \mathbb{R}$ எனவும் $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} & ; \quad x<0 \text{ எனின்,} \\ a\cos \pi x + b & ; \quad x=0 \text{ எனின்,} \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + a - 1 & ; \quad x>0 \text{ எனின்,} \end{cases}$$

இனால் வரையறுக்கப்படும் சார்பு எனவும் கொள்வோம். f ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பெனின், a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. $a, b \in \mathbb{R}$ எனவும் $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x < 0 \text{ எனின்,} \\ x^{\frac{3}{2}} & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ எனின்,} \\ ax + b & ; \quad 1 < x \text{ எனின்,} \end{cases}$ எனவும் கொள்வோம்.

$f(x)$ ஆனது $x = 0$ இல் வகையிடத்தக்கதெனக் காட்டுக.

$f(x)$ ஆனது $x = 1$ இல் வகையிடத்தக்கதாக இருக்குமாறு a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. $x > 0$ இற்கு வகையீட்டுச் சமன்பாடு $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y - x\sin x = 0$ இன் நிபந்தனை $y(\pi) = 1$ இற்குக் கட்டுப்பட்டுள்ள தீர்வைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. f என்பது $f''(x)$ ஆனது $[0, 1]$ மீது தொடர்ச்சியாக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு மெய்ப் பெறுமானமுள்ள சார்பெனக் கொள்வோம். $f(1)=0, f'(1)=-3, \int_0^1 f(x)\,dx = 2$ எனின், $\int_0^1 x^2 f''(x)\,dx = 1$ எனக் காட்டுக.

10. $r = 6(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ஆகிய முனைவுச் சமன்பாடுகள் உள்ள வளையிகளைப் பருமட்டாக வரைக. இம்மூன்று வளையிகளினாலும் வரைப்புற்ற பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022(2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022(2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022(2023)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (*a*) A, B, C ஆகியன ஓர் அகிலத் தொடை S இன் தொடைப்பிரிவுகளெனக் கொள்வோம். தொடை அட்சரகணிதத்தில் நீங்கள் பயன்படுத்தும் விதிகளைத் தெளிவாகக் கூறி,

(i) $A\cap(B\cap C)'=(A'\cup B)'\cup(A'\cup C)'$,

(ii) $A\cap\big((B\cap C')\cup(C\cap B')\big)=A\cap(B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$,

எனக் காட்டுக; இங்கு $A\setminus B$ ஆனது $A\cap B'$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றது.

(*b*) ஒரு தேசிய விளையாட்டுப் போட்டியில் ஒரு மாவட்டத்தைப் பிரதிநிதித்துவப்படுத்தி ஈட்டி எறிதல், வட்டு எறிதல், உயரம் தாண்டுதல் என்னும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளில் பங்குபற்றிய மெய்வல்லுநர் குழுவில்

(i) 8 மெய்வல்லுநர்கள் எல்லா மூன்று நிகழ்ச்சிகளிலும்

(ii) 27 மெய்வல்லுநர்கள் ஈட்டி எறிதலில் அல்லது வட்டு எறிதலில்

(iii) 28 மெய்வல்லுநர்கள் ஈட்டி எறிதலில் அல்லது உயரம் தாண்டுதலில்

(iv) 25 மெய்வல்லுநர்கள் வட்டு எறிதலில் அல்லது உயரம் தாண்டுதலில்

(v) 10 மெய்வல்லுநர்கள் ஒரு நிகழ்ச்சியில் மாத்திரம்

பங்குபற்றினர் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. செப்பமாக இரு நிகழ்ச்சிகளில் பங்குபற்றிய மெய்வல்லுநர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

12. (*a*) $a, b, c > 0$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ எனக் காட்டி, $a^2+b^2+c^2\ge bc+ca+ab$ என **உய்த்தறிக.**

(ii) $a+b+c=1$ எனின், $(1-a)(1-b)(1-c)\le\frac{8}{27}$ எனக் காட்டுக.

(*b*) உருமாற்றம் $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ஆனது xy-தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளை $x'y'$-தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளுக்குப் படமாக்குகின்றது. இவ்வுருமாற்றத்தின் கீழ்த் தம்மீதே படமாக்கப்பட்ட எல்லா நேர்கோடுகளினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க. கோடு $y=3x+1$ இன் $x'y'$-தளத்திலான விம்பத்தைக் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

13. ஒரு நேர் நிறைவெண் சுட்டிக்குத் **த மோய்வரின் தேற்றத்தைக்** கூறி, நிறுவுக.

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ இற்கு $Z_k = \cos(6k+1)\frac{\pi}{15} + i\sin(6k+1)\frac{\pi}{15}$ எனக் கொள்வோம்.

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ இற்கு $Z_k^5 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $Z^5 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

சமன்பாடு $Z^5 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ இன் 5 தீர்வுகளை எழுதுக.

பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றையும் தீர்க்க:

(i) $Z^{10} + Z^5 + 1 = 0$,

(ii) $2(z+i)^5 = (1+i\sqrt{3})(z-i)^5$.

14.(*a*) C_1, C_2 ஆகியன முறையே $x = \sqrt{y-1}$, $x = y-1$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு வளையிகளெனக் கொள்வோம். C_1, C_2 ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் S ஐப் பரும்படியாக வரைந்து, பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

மேலும் கோடு $y = -1$ பற்றி 2π ஆரையனூடாகப் பிரதேசம் S ஐச் சுழற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவையும் காண்க.

(*b*) வகையீட்டுச் சமன்பாடு $9\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x+y)^2(x+y+3)^2 - 1$ ஐக் கருதுக.

பிரதியீடு $v = x + y$ ஐப் பயன்படுத்தி, $9\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v^2(v+3)^2$ எனக் காட்டி, **இதிலிருந்து,** தரப்பட்ட வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க.

15.(*a*) $n = 0, 1, 2, \ldots$ இற்கு $I_n = \int_0^1 (x^2+1)^n \,\mathrm{d}x$ எனக் கொள்வோம்.

$I_n - I_{n-1}$ ஐக் கருதுவதன் மூலம் அல்லது வேறு விதமாக, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு

$(2n+1)I_n - 2n\,I_{n-1} = 2^n$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, I_4 இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*b*) f ஆனது சமன்பாடு $f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = x^2 \sin 5x$ ஐத் திருப்தியாக்கும் ஒரு சார்பெனக் கொள்வோம்.

$f(0) = 1$ எனவும் $f'(0) = 3$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

$f(x)$ இன் மக்குளோரின் தொடரை உறுப்பு x^3 (உட்பட) வரைக்கும் காண்க.

இதனைப் பயன்படுத்தி, $f(0.1)$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

16. (*a*) $a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha = p^2$ எனின், நேர்கோடு $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ஆனது அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ இற்கு ஒரு தொடலியாகும் எனக் காட்டுக.

தொடுகைப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

வட்டம் $x^2 + y^2 = 9$ ஐத் தொடும் அதிபரவளைவு $9x^2 - 16y^2 = 144$ இற்கு உள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(*b*) பரவளைவு $y^2 = \frac{1}{2}x$ இற்குப் புள்ளி $(2t^2, t)$ இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, பரவளைவு $y^2 = \frac{1}{2}x$ இனதும் நீள்வளையம் $5x^2 + 20y^2 = 4$ இனதும் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. (*a*) $f(x) = \dfrac{3\cos^2 x + \sin^2 x}{6\sin x\cos x + 2\cos^2 x + 5}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) f இன் ஆட்சி $\mathbb{R}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $0 \le f(x) \le 1$ எனக் காட்டுக.

(iii) $f(x) = 0,\ f(x) = 1$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ இற்கு $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

(*b*) ஐந்து நிலைக்கூறுகள் k உடன் **சிம்சனின் நெறி**யைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் $\int_0^4 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ இன் அண்ணளவுப் பெறுமானம் பெறப்படுகின்றது.

$k = \frac{1}{n}\ln\left(m \times 10^5\right)$ எனக் காட்டுக; இங்கு m, n ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய நேர் நிறைவெண்களாகும்.

தொகையீடு $\int_0^4 \ln\left\{(1+x^2)^3(x^2-8x+17)^4\right\}\mathrm{d}x$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தை k இற் காண்க.

***

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි /முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022 (2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022 (2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022 (2023)

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

* இவ்வினாத்தாள் **பகுதி A** (வினாக்கள் 1 - 10), **பகுதி B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
* **பகுதி A :**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* **பகுதி B :**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் **பகுதி B** ஐ **மாத்திரம்** பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

* புள்ளிவிபர அட்டவணை வழங்கப்படும்.
* g புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் II		
பகுதி	**வினா எண்**	**புள்ளிகள்**
A	**1**	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	**11**	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்: 1	
2	
மேற்பார்வை செய்தவர்	

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்னும் இரு விசைகள் முறையே ஒரு புள்ளி $A \equiv (1, 2, 3)$ இலும் ஒரு புள்ளி B இலும் தாக்குகின்றன. உற்பத்தி பற்றி $\mathbf{F}_1$ இன் திருப்பம் புள்ளி A பற்றி $\mathbf{F}_2$ இன் திருப்பத்திற்குச் சமம். புள்ளி B இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

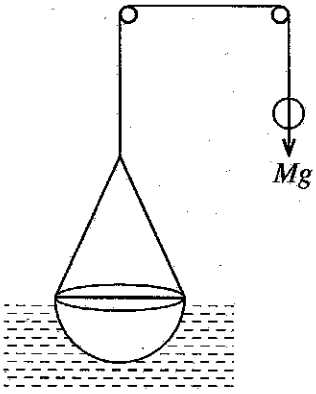
2. O ஆனது உற்பத்தி எனவும் $A \equiv (1, 2, 3)$ எனவும் $B \equiv (2, 2, 1)$ எனவும் கொள்வோம். C என்பது $|\overrightarrow{OC}| = 1$ ஆகவும் $\overrightarrow{OC}$ ஆனது $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ இன் அதே திசையிலும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளியெனவும் கொள்வோம். $\overrightarrow{OC}$ ஐக் காண்க.

M ஆனது AB இன் நடுப் புள்ளியெனக் கொள்வோம். $\overrightarrow{CM}$ இற்கும் $\overrightarrow{CO}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

0077

3. அடர்த்தி ρ ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக் கோளத்தின் தட்டையான மேற்பரப்பையும் அடர்த்தி ρ ஐயும் ஆரை a ஐயும் உயரம் $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் தட்டை மேற்பரப்பையும் விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு திண்மப் பொருள் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு இரு நிலைத்த ஒப்பமான கப்பிகளுக்கு மேலாகச் சென்று ஒரு நுனி கூம்பின் உச்சியுடனும் மற்றைய நுனி திணிவு M ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையுடனும் இணைக்கப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் அரைக்கோளம் அடர்த்தி σ ஐ உடைய ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில் முழுமையாக அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் பொருள் நாப்பத்திற் பேணப்படுகின்றது. M ஐ ρ, σ, a ஆகியவற்றிற் காண்க.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. நேரம் t இல் ஒரு துணிக்கை P இன் ஆர்முடுகல் $\mathbf{a}(t) = \sin t\,\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} - te^t\mathbf{k}$ இனால் தரப்படுகின்றது. $t = 0$ இல் உள்ள தானக் காவியும் வேகமும் முறையே $2\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ ஆகும். நேரம் t இல் P இன் தானக் காவியைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

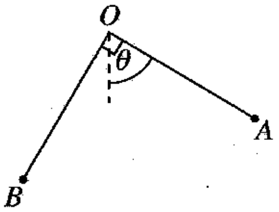
....

....

....

5. ஒரு கிடை மேசை மீது கதி u உடன் இயங்கும் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் படுகின்றது. P இற்கும் சுவரிற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். மோதுகைக்குச் சற்று முன்னர் P இன் இயக்கத் திசை மேசையினதும் சுவரினதும் வெட்டுக் கோட்டுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குகின்றது. இம்மோதுகையின் விளைவாக P இன் இயக்கத் திசை ஒரு செங்கோணத்தினூடாகத் திரும்புகின்றது. e ஐ θ இற் காண்க.
மோதுகை காரணமாக இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியில் உள்ள இழப்பு $\frac{1}{2}mu^2(1-e)$ எனக் காட்டுக.

6. ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m ஆகவும் நீளம் $2a$ ஆகவும் உள்ள OA, OB என்னும் இரு சீரான கோல்கள் $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு விறைப்பான L வடிவச் சட்டத்தை ஆக்குமாறு O இல் மூட்டப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டம் நிலைத்த புள்ளி O இனூடாக அதற்குச் செங்குத்தான ஓர் ஒப்பமான அச்சுப் பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாகச் சுழலத்தக்கதாகும். அது OA கிடையாக இருக்குமாறு வைத்திருக்கப்பட்டு, விடுவிக்கப்படுகின்றது. கோல் OA ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கும்போது $\dot{\theta}^2$ ஐக் காண்பதற்குரிய ஒரு சமன்பாட்டினைப் பெறுக.



7. மாணவன் ஒருவன் பாடவிதானத்திற்குப் புறம்பான ஒரு செயற்பாடாகக் கிரிக்கெற்றைத் தெரிந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 உம் பாடவிதானத்திற்குப் புறம்பான ஒரு செயற்பாடாகக் கூடைப்பந்தாட்டத்தைத் தெரிந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 உம் ஆகும். மாணவன் ஒருவன் கிரிக்கெற்று, கூடைப்பந்தாட்டம் ஆகிய இரண்டையும் தெரிந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.3 ஆகும்.

(i) ஓர் எழுமாறாகத் தெரிந்தெடுத்த மாணவன் மேற்குறித்த பாடவிதானத்திற்குப் புறம்பான செயற்பாடுகளில் செப்பமாக ஒன்றை மாத்திரம் தெரிந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவை

(ii) ஐம்பது (50) மணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில் மேற்குறித்த பாடவிதானத்திற்குப் புறம்பான செயற்பாடுகளில் செப்பமாக ஒன்றை மாத்திரம் தெரிந்தெடுக்கும் மாணவர்களின் எதிர்பார்த்த எண்ணிக்கையைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. ஒரு குறித்த அமைவிடத்திற்கான ஒரு தனி வருகையில் அவதானிக்கத்தக்க ஒரு குறித்த இனம் X இன் பறவைகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு $P(X=x) = \dfrac{e^{-2}2^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$ இற்கான ஒரு புவசோன் பரம்பலைப் பின்பற்றுகின்றது.

அமைவிடத்திற்கான ஒரு தனி வருகையில் இவ்வினத்தின் அவதானிக்கப்பட்ட பறவைகளின் எண்ணிக்கை

(i) குறைந்தபட்சம் 1 ஆக,

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒன்றேனும் அவதானிக்கப்படுகின்றதெனத் தரப்படும்போது, உயர்ந்தபட்சம் 2 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. ஒரு தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறி X இன் அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x)=\begin{cases} kx+\frac{1}{2} & , \quad 0\le x\le 1 \text{ எனின்,} \\ 0 & , \quad \text{வேறு விதமாக,} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது; இங்கு k ஒரு மாறிலி. k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
மேலும் $E(X)$ ஐயும் $E(X^2)$ ஐயும் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு பின்வருமாறாகும்.

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.3	0.3	0.2	p	q

$E(X) = 1.4$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. மேலும் $\mathrm{Var}(X)$ ஐயும் காண்க.

Y ஆனது $Y = 2X + 1$ இன் மூலம் வரையறுக்கப்படும் எழுமாற்று மாறி எனக் கொள்வோம். $E(Y)$ ஐயும் $\mathrm{Var}(Y)$ ஐயும் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022 (2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022 (2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022 (2023)

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. $A \equiv (1, 0, 0), B \equiv (0, 1, 0), C \equiv (0, 0, 1)$ எனக் கொள்வோம். AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்கள் வழியே எழுத்து ஒழுங்குமுறையினாற் காட்டப்படும் போக்கில் முறையே 2 N, 2 N, 6 N பருமனுள்ள $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3}$ என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி ஒரு தனி விளையுள் விசைக்குச் சமவலுவுள்ளதெனக் காட்டி, அதன் தாக்கக் கோட்டின் தெக்காட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$D \equiv (1, 0, 1)$ எனக் கொள்வோம். இப்போது விசை $\mathbf{F_3}$ இற்குப் பதிலாக CD, DA ஆகிய பக்கங்கள் வழியே எழுத்து ஒழுங்குமுறையினாற் காட்டப்படும் போக்கில் தாக்கும் முறையே α N, β N பருமனுள்ள $\mathbf{F_4}, \mathbf{F_5}$ என்னும் இரு விசைகள் இடப்படுகின்றன.

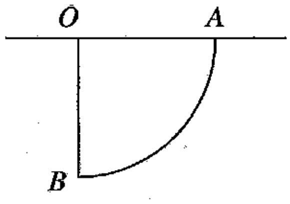
(i) $\alpha = -\beta = -4$ எனின், $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_4}, \mathbf{F_5}$ ஆகிய விசைகளின் தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்கும் எனவும்

(ii) $\alpha \neq -\beta$ எனின், $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_4}, \mathbf{F_5}$ ஆகிய விசைகளின் தொகுதி ஓர் இணையாகவும் A இல் தாக்கும் ஒரு தனி விசையாகவும் ஒடுங்கும் எனவும்

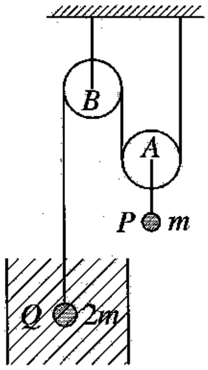
காட்டுக.

12. ஆரை a ஐ உடைய கால்வட்ட வடிவமுள்ள ஓர் அடர் ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில், அதன் மேற்பரப்பு நிலைக்குத்தாகவும் ஒரு விளிம்பு திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பிலும் இருக்குமாறு, அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அடரின் அமுக்க மையம் திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பிலிருந்து ஆழம் $\frac{3\pi a}{16}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

ஒரு கனவடிவத் தாங்கியின் நிலைக்குத்துப் பக்கங்களில் ஒன்றின் மீது ஆரை a ஐ உடைய ஒரு கால்வட்ட வடிவமுள்ள ஒரு மூடி OAB ஆனது கிடை விளிம்பு OA வழியே சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு உள்ளது. தாங்கியில் OA இன் மட்டம் வரைக்கும் அடர்த்தி ρ ஐ உடைய ஓர் ஏகவினத் திரவம் இடப்பட்டுள்ளது. மூடி மூடப்பட்டிருப்பதற்கு B இல் OAB இன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகப் பிரயோகிக்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச விசையின் பருமனைக் காண்க.



13. உருவில் A, B ஆகியன இரு இலேசான ஒப்பமான கப்பிகளாகும். இங்கு A இயங்கும் கப்பியாக இருக்கும் அதே வேளை B நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. A இலிருந்து திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P தொங்குகின்றது. திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q ஒரு தடுக்கும் ஊடகத்தில் கதி v இல் இயங்கும்போது அவ்வூடகம் தடை mkv ஐ அளிக்கின்றது; இங்கு $k(> 0)$ ஒரு மாறிலி. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கப்பி B இற்கு மேலாகவும் கப்பி A இற்குக் கீழாகவும் செல்லும் ஒரு நீட்டமுடியாத இலேசான இழையின் ஒரு நுனி Q உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.



$9\frac{dv}{dt} = 6g - 4kv$ எனக் காட்டுக.

தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் கணத்திலிருந்து Q ஒரு கதி $\frac{3g}{4k}$ ஐ அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் இக்காலத்தின்போது P சென்ற தூரத்தையும் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

14. சம ஆரையும் முறையே $m, 4m$ என்னும் திணிவுகளும் உள்ள A, B என்னும் இரு ஒப்பமான கோளங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்தில் இயங்கிக்கொண்டு சரிவாக மோதுகின்றன. அவை மோதும்போது மையமிணை கோடு $\mathbf{i}$ இற்குச் சமாந்தரமாகும். மோதுகைக்குச் சற்று முன்பாக A, B ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே $u(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $-2u(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ ஆகும். A இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

(i) மோதுகைக்குச் சற்றுப் பின்னர் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்கள்

(ii) மோதுகை காரணமாக A மீது உள்ள கணத்தாக்கின் பருமன்

(iii) மொத்தல் காரணமாக A இன் இயக்கத் திசை திரும்பும் கோணம்

(iv) மோதுகை காரணமாக இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியில் உள்ள இழப்பு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

15. திணிவு M ஐயும் நீளம் $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு மெல்லிய சீரான கோலின் நடுப்புள்ளியினூடாகவும் கோலிற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள ஓர் அச்சுப் பற்றிய சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{1}{3}Ma^2$ என நிறுவுக.

AB, BC, AC என்னும் மூன்று சீரான கோல்களின் நீளங்கள் முறையே $8a, 6a, 10a$ ஆகும். ஒவ்வொரு கோலினதும் அலகு நீளத்திற்கான திணிவு m ஆகும். கோல்கள் ஒரு முக்கோணிச் சட்டம் ABC ஐ ஆக்குமாறு ஒருமிக்க இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A இனூடாகவும் சட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான அச்சுப் பற்றிச் சட்டத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் $960\ ma^3$ எனக் காட்டுக.

சட்டமானது A இனூடாகச் சட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள கிடை அச்சுப் பற்றிச் சுயாதீனமாகச் சுழலத்தக்கதாக A இற் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டமானது AB கிடையாகவும் B இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே C உம் இருக்கத்தக்கதாக ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. AB நிலைக்குத்தாக இருக்கும்போது சட்டத்தின் கோணக் கதி $\sqrt{\frac{7g}{20a}}$ எனக் காட்டுக.

AB நிலைக்குத்தாக இருக்கும் கணத்தில் சட்டத்தின் எந்தப் புள்ளியில் அதியுயர் கதி உண்டெனக் கூறி, அக்கதியை a, g ஆகியவற்றிற் காண்க.

16. (*a*) ஒரு பேருந்து ஒரு குறித்த பேருந்துத் தரிப்பிடத்தை அடையும்போது அப்பேருந்தில் ஆளில்லாத ஆசனங்களின் எண்ணிக்கையைப் பின்னக எழுமாற்று மாறி X குறிக்கின்றதெனக் கொள்வோம். கடந்தகால அனுபவத்தை அடிப்படையாய்க் கொண்டு X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு பின்வருமாறு இருக்குமென அறியப்பட்டுள்ளது.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

இக்குறித்த பேருந்துத் தரிப்பிடத்திலிருந்து மூன்று பயணிகள் இப்பேருந்தில் ஏறினால்,

(i) அவர்கள் அனைவருக்கும் ஆளில்லாத ஆசனங்கள் கிடைப்பதற்கான,

(ii) உயர்ந்தபட்சம் அவர்களில் ஒருவருக்கேனும் ஓர் ஆளில்லாத ஆசனம் கிடைப்பதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

$E(X)$ ஐயும் $\mathrm{Var}(X)$ ஐயும் காண்க.

(*b*) ஒரு கோடிய நாணயம் ஓர் எழுமாற்றுச் சுண்டியெறிகையில் தலைகள் மேலே இருக்குமாறு விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ ஆகும். இரு அடுத்துள்ள சுண்டியெறிகைகளில் அது தலைகள் மேலே இருக்குமாறு விழும்வரைக்கும் ஒரு விளையாட்டு ஆடப்படுகின்றது. வெவ்வேறு சுண்டியெறிகைகளின் விளைவுகள் ஒன்றையொன்று சார்ந்திருப்பதில்லை எனவும் ஒவ்வொரு சுண்டியெறிகையிலும் ஒரு தலை அல்லது பெறுமானம் மேலே இருக்குமாறு அது விழுகின்றது எனவும் கொள்க. k ஒரு நேர் நிறைவெண் எனக் கொள்வோம்.

(i) இரண்டாவது சுண்டியெறிகைக்குப் பின்னர் விளையாட்டு முடிவடைவதற்கான,

(ii) k ஆவது சுண்டியெறிகையில் முதல் தடவையாக ஒரு தலை மேலே இருப்பதற்கான,

(iii) k ஆவது சுண்டியெறிகையில் முதல் தடவையாக ஒரு தலை மேலே இருப்பதுடன் $(k+1)$ ஆவது சுண்டியெறிதலிற்கு பின்னர் விளையாட்டு முடிவடைவதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

17. (*a*) ஒரு தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)= \lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$ இனால் தரப்படுகின்றது; இங்கு $\lambda\,(>0)$ ஒரு பரமானம்.

$E(X), \mathrm{Var}(X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

ஒரு பொறியில் உள்ள ஓர் இலத்திரனியற் கூறின் ஆயுட்காலம் (மாதங்களிலான) X ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)= \frac{1}{4}e^{\frac{-x}{4}}$, $x>0$ ஐ உடையது.

இவ்விலத்திரனியற் கூறு

(i) 6 மாதங்களைக் கடப்பதற்கு முன்பதாகத் தவறுவதற்கான,

(ii) 6 மாதங்களைக் கடந்து தொழிற்படுவதற்கான, ஆனால் ஓர் ஆண்டிற்கு முன்பதாகத் தவறுவதற்கான

(iii) எதிர்பார்த்த ஆயுட்காலத்திலும் மேலாக தொழிற்படுவதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) ஒரு நகரத்தின் குறைந்தபட்சத் தினசரி வெப்பநிலை ஓர் இடை 34 ℃ உடனும் ஒரு நியம விலகல் 4 ℃ உடனும் ஒரு செவ்வன் பரம்பலைப் பின்பற்றுவதாக அறியப்பட்டுள்ளது.

ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த நாளில் இந்நகரத்தின் குறைந்தபட்ச வெப்பநிலை

(i) 32 ℃ இற்குக் கீழே இருப்பதற்கான,

(ii) 32 ℃ இற்குக் கீழே உள்ளதெனத் தரப்படுமெனின், 30 ℃ இலும் குறைவாக இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

* * *